اکستروپی طول عمر سیستم‌های منسجم و کاربرد آن در انتخاب سیستم ارجح

عبدالسعید توماج[۱]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۵

چکیده:

این مقاله به بررسی برخی از ویژگی‌های اکستروپی طول عمر سیستم‌های منسجم، با این فرض که توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم مستقل و به‌طور یکسان توزیع‌شده‌اند، می‌پردازد. نتایج ارائه‌شده با استفاده از مفهوم اثر مشخصه به‌دست‌آمده است. بدین منظور، ابتدا عبارتی برای اکستروپی طول عمر سیستم‌های منسجم به دست می‌آید. سپس، مقایسه‌های تصادفی اکستروپی برای سیستم‌های منسجم به شرطی که هر دو سیستم دارای اثر مشخصه یکسان باشند، موردبحث قرار می‌گیرد. در مواردی که تعداد مؤلفه‌های سیستم زیاد یا سیستم دارای ساختار پیچیده‌ای باشد، به دست آوردن مقدار دقیق اکستروپی طول عمر سیستم سخت یا وقت‌گیر می‌باشد؛ بنابراین، کران‌هایی نیز برای اکستروپی به‌دست‌آمده است. علاوه بر این، یک معیار جدید برای انتخاب یک سیستم ارجح بر اساس اکستروپی نسبی پیشنهادشده است که نزدیک‌ترین طول عمر سیستم دلخواه به سیستم موازی را در نظر می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: اکستروپی، اکستروپی نسبی، اثرمشخصه، ترتیب‌های تصادفی، سیستم منسجم.

۱ مقدمه

نظریه اطلاعات به مطالعه کمی‌سازی، ذخیره‌سازی و ارتباط اطلاعات دیجیتال می‌پردازد. کلود شانون، مهندس و ریاضیدانی که در آزمایشگاه‌های تلفن بل مشغول به کار بود، مقاله‌ای با عنوان «نظریه ریاضی ارتباطات» را منتشر کرد که به‌عنوان مبنایی برای تولد نظریه اطلاعات شناخته می‌شود. در این مقاله، شانون تعریفی دقیق از مفهوم «اطلاعات» برای مهندسان ارائه داد و روشی دقیق برای کمی‌سازی آن ارائه نمود. وی نشان داد که چگونه می‌توان اطلاعات را قبل از ارسال فشرده کرده و به ارتباطات تقریباً بدون خطا دست‌یافت. اندازه‌گیری آنتروپی، از زمان معرفی کامل آن در مقاله‌ای که توسط شانون [۱۰] انتشار یافت، در علوم اطلاعات، فیزیک، احتمال، آمار، نظریه ارتباطات و اقتصاد کاربردهای گسترده‌ای داشته است. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته نامنفی با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. آنگاه آنتروپی تفاضلی شانون به‌صورت $H(X) = -\mathbb{E}(\log f(X))$، تعریف می‌شود که در آن $\mathbb{E}(\cdot)$ به معنای امید ریاضی و $\log(\cdot)$ لگاریتم طبیعی می‌باشد. در سال‌های اخیر، علاقه فزاینده‌ای به یک معیار دوگانه تکمیلی عدم قطعیت، معروف به اکستروپی که توسط لد و همکاران [۶] پیشنهاد شد، به وجود آمده است. بر این اساس اکستروپی متغیر تصادفی X به‌صورت زیر تعریف‌شده است

$$J(X) = -\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} f^{2}(x)dx = -\frac{1}{2}\mathbb{E}[f(F^{-1}(U))], \qquad (۱)$$

که در آن U دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0,1]$ و $F^{-1}(u) = \inf\{x; F(x) \geq u\}$، برای $u \in [0,1]$ نشان‌دهنده تابع چندک تابع توزیع F می‌باشد. اکستروپی همواره دارای مقادیر منفی می‌باشد. برخلاف آنتروپی دیفرانسیل شانون که ویژگی افزایشی دارد، اکستروپی ویژگی غیرافزایشی دارد؛ به‌عبارت‌دیگر، برای دو متغیر تصادفی مستقل X و Y، اکستروپی توأم $J(X,Y)$ برابر است با $J(X,Y) = J(X) + J(Y) - J(X)J(Y)$. این ویژگی انعطاف‌پذیری اکستروپی را در مقایسه با آنتروپی شانون توجیه می‌کند و در بسیاری از زمینه‌های نظریه اطلاعات، فیزیک، شیمی و غیره کاربرد دارد.

هدف اصلی مقاله حاضر، بررسی برخی ویژگی‌های عدم قطعیت طول عمر سیستم‌های منسجم از منظر اکستروپی است. قبلاً بسیاری از پژوهشگران به بررسی ویژگی‌های اطلاعاتی آماره‌های ترتیبی پرداخته‌اند. به‌عنوان‌مثال آنتروپی شانون برخی از سیستم‌های ساده مانند سیستم‌های k از n را می‌توان با استفاده از نتایج آمارهای ترتیبی که توسط وانگ [۱۴] و ابراهیمی و همکاران [۴] و دیگران ارائه‌شده است، محاسبه و مطالعه کرد.

همچنین آنتروپی رنی و تسالیس طول عمر سیستم‌های k از n را

[۱] گروه آمار و ریاضی، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گنبدکاووس. (نویسنده مسئول: ab.toomaj@gmail.com)

می‌توان با استفاده از نتایجی که در مقالات عباس‌نژاد و ارقامی [۱] و براتپور و خمر [۲] ارائه‌شده است را موردبررسی قرار داد. در سال‌های اخیر، بررسی ویژگی‌های عدم قطعیت طول عمر سیستم‌های منسجم با استفاده از مفهوم اثر مشخصه (بردار علامت) بسیار موردتوجه قرارگرفته است. توماج و دوست‌پرست [۱۱] به بررسی آنتروپی شانون کلاسیک طول عمر سیستم‌های منسجم پرداخته و کران‌هایی نیز برای آن به دست آورده است. همچنین توماج [۱۲] ویژگی‌های آنتروپی رنی طول عمر سیستم‌های منسجم را نیز بررسی کرده است. در سال‌های اخیر نیز کیو و همکاران [۷] به بررسی اکستروپي طول عمر سیستم‌های منسجم پرداخته و کران‌هایی نیز برای آن به دست آورده است. در این مقاله، با بررسی ویژگی‌های طول عمر سیستم از منظر اکستروپی، به بررسی این خط از تحقیقات ادامه می‌دهیم. به‌ویژه اینکه، معیاری جدید مبتنی بر اکستروپی نسبی برای انتخاب سیستم با طول عمر نزدیک‌تر به سیستم موازی ارائه می‌شود. یکی از مزایای معیار پیشنهادی این است که محاسبه این معیار در مقایسه با سایر معیارهای عدم قطعیت، مانند آنتروپی شانون، وقتی‌که سیستم دارای ساختار بسیار پیچیده یا تعداد مؤلفه‌های زیاد باشد، آسان‌تر است.

بدین منظور، در بخش ۲، عبارتی برای اکستروپی طول عمر سیستم منسجم وقتی مؤلفه‌های سیستم مستقل و هم توزیع هستند، به دست می‌آوریم. سپس با ارائه مثالی اهمیت عبارت به‌دست‌آمده را بیان می‌کنیم. در ادامه، به مقایسه اکستروپی طول عمرهای دو سیستم منسجم وقتی مؤلفه‌های سیستم دارای طول عمرهای مختلف ولی دارای اثر مشخصه یکسان هستند، ارائه خواهیم داد. در بخش ۳، کران‌هایی را برای اکستروپی طول عمر سیستم‌های منسجم به دست می‌آوریم. در بخش ۴ نیز معیار جدیدی برای انتخاب یک سیستم ارجح بر اساس اکستروپی نسبی پیشنهادشده است که نزدیک‌ترین طول عمر سیستم دلخواه به سیستم موازی را در نظر می‌گیرد. در بخش ۵ نیز بحث و نتیجه‌گیری ارائه‌شده است.

۲ اکستروپی طول عمر سیستم‌های منسجم

در این بخش عبارت مفیدی را برای اکستروپی طول عمر سیستم‌های منسجم به دست می‌آوریم. یک سیستم را منسجم می‌گوییم هرگاه هیچ مؤلفه نامربوط در آن وجود نداشته باشد و همچنین تابع ساختار سیستم یکنوا باشد (رجوع کنید به بارلو و پروشان [۳]). فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع $F(t)$، تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}(t)=1-F(t)$ و تابع چگالی احتمال $f(t)$، بیانگر طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم منسجم n مؤلفه‌ای باشند. همچنین $X_{i:n}$، $(i=1,\ldots,n)$ نیز بیانگر iامین آماره‌ی ترتیبی حاصل از $X_1,\ldots,X_n$ باشد. سامانیگو [۸] نشان داد که تابع قابلیت اعتماد سیستم منسجم با طول عمر T را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\bar{F}_T(t)=P(T>t)=\sum_{i=1}^{n} s_i\bar{F}_{i:n}(t),\ t>0, \tag{۲}$$

که در آن

$$\bar{F}_{i:n}(t)=\sum_{j=1}^{i-1}\binom{n}{j}F^j(t)\overline{F}^{n-j}(t),\ t>0,$$

تابع قابلیت اعتماد iامین آماره‌ی ترتیبی می‌باشد. به بردار n بعدی $\mathrm{s}=(s_1,\cdots,s_n)$ اثرمشخصه‌ی سیستم (بردار علامت) گویند که در آن عنصر iام عبارت است از $s_i=P(T=X_{i:n})$ $i=1,2,\ldots,n$، و احتمال این است که خرابی iامین مؤلفه منجر به خرابی کل سیستم شود. لازم به ذکر است که در اثرمشخصه سیستم $1\le s_i\le 0$ و $\sum_{i=1}^{n}s_i=1$، برقرار می‌باشد. تابع چگالی احتمال طول عمر سیستم منسجم با استفاده از عبارت (۲) به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_T(t)=\sum_{i=1}^{n} s_i f_{i:n}(t),\ t>0, \tag{۳}$$

که در آن

$$f_{i:n}(t)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}[F(t)]^{i-1}[\bar{F}(t)]^{n-i}f(t),\ t\ge 0,$$

برای هر $n\le i\le 1$، و $\Gamma(\cdot)$ تابع گامای کامل می‌باشد. به‌طورکلی عبارت‌های (۲) و (۳) بیان‌کننده‌ی این است که توابع بقا و چگالی احتمال طول عمر سیستم منسجم را می‌توان به‌صورت ترکیب وزنی یا آمیخته از توابع بقا و چگالی احتمال سیستم‌های i از n با ضرایب اثر مشخصه‌ی سیستم نوشت. لازم به یادآوری است که یک سیستم i از n متشکل از n مؤلفه سیستمی است که با خرابی مؤلفه iام از کار می‌افتد. ازاین‌پس یک عبارت برای اکستروپی طول عمر سیستم منسجم ارائه می‌شود که در آن تبدیل انتگرال احتمال $V=F(T)$ نقش حیاتی برای هدف مذکور بازی می‌کند. همان‌طور که می‌دانیم تبدیل‌های متناظر با طول عمر مؤلفه‌های سیستم، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع $U_1=F(X_1)$،$\cdots$،$U_n=F(X_n)$ هستند که دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0,1]$ می‌باشند. از طرفی می‌دانیم که آماره‌های ترتیبی $U_{i:n}=F(X_{i:n})$ دارای توزیع بتا با پارامترهای i و $n-i+1$ با تابع چگالی زیر می‌باشند:

$$g_i(u)=B^{-1}(i,n-i+1)u^{i-1}(1-u)^{n-i},\quad 0<u<1, \tag{۴}$$

براي هر $i=1,\cdots,n$، به‌طوری‌که

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

تابع بتا می‌باشد. از طرفی تابع چگالی احتمال $V=F(T)$ برابر است با

$$g_V(v)=\sum_{i=1}^{n} s_i g_i(v),\quad 0<v<1. \tag{5}$$

با کاربرد تبدیل انتگرال احتمال $V=F(T)$ اکستروپی توزیع طول عمر سیستم منسجم در قضیه بعدی به دست می‌آید.

قضیهٔ ۱.۲. *فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع $F(t)$ و تابع چگالی احتمال $f(t)$، بیانگر طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم منسجم n مؤلفه‌ای با طول عمر T و اثر مشخصه $\mathbf{s}=(s_1,\cdots,s_n)$ باشند. اکستروپی سیستم با طول عمر T را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:*

$$J(T)=-\frac{1}{2}\int_0^1 g_V^2(u)f(F^{-1}(u))du. \tag{6}$$

اثبات. با استفاده از تغییر متغیر $u=F(x)$ از (۱) و (۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
J(T) &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(f_T(x)\right)^2 dx\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i f_{i:n}(x)\right)^2 dx\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{1}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i g_i(u)\right)^2 f(F^{-1}(u))du\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{1} g_V^2(u)f(F^{-1}(u))du.
\end{aligned}$$

در آخرین تساوی از $g_V(u)=\sum_{i=1}^{n} s_i g_i(u)$، که در رابطه (۵) داده‌شده، استفاده گردیده و بدین ترتیب قضیه کامل می‌شود. □

در حالت خاص اگر $T=X_{i:n}$ طول عمر یک سیستم i از n با اثرمشخصه‌ی $\mathbf{s}=(0,\cdots,0,1_i,0,\cdots,0)$ باشد، آنگاه

$$J(X_{i:n})=-\frac{1}{2}\int_0^1 g_i^2(u)f(F^{-1}(u))du \tag{7}$$

برای نشان دادن کاربرد فرمول (۶)، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲.۲. *سیستم پل با طول عمر T در نگاره‌ی ۱ را در نظر بگیرید. اثرمشخصه‌ی سیستم برابر است با*

$$\mathbf{s}=\left(0,\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5},0\right).$$

فرض کنید توزیع طول عمر مؤلفه‌های سیستم وایبول با تابع توزیع زیر باشد

$$F(t)=1-e^{-t^{\beta}},\ t>0,\ \beta>0. \tag{8}$$

با انجام محاسبات و استفاده از عبارت (۶)، مقدار اکستروپی طول عمر سیستم منسجم به‌صورت زیر به دست می‌آید:

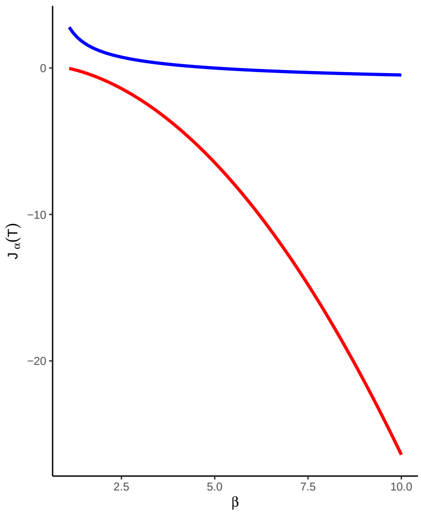
$$J(T)=-\frac{1}{2}\beta\int_0^1\left(-\log(1-u)\right)^{(1-\frac{1}{\beta})}(1-u)g_V^2(u)du,$$

که در آن

$$g_v(u)=\frac{2}{15}u^3-\frac{1}{15}u^4-\frac{7}{60}u^2+\frac{1}{20}u,\ 0<u<1.$$

ازآنجایی‌که عبارت ساده و صریحي براي انتگرال فوق، نمي‌توان به دست آورد، بنابراین از روش‌هاي عددي استفاده گرديد.

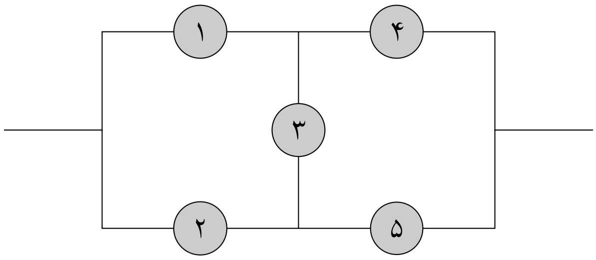
نمودار اکستروپی نسبت به پارامتر β در نگاره ۲.۲ نشان داده‌شده است. نمودار نشان می‌دهد که اکستروپی نسبت به پارامتر شکل β تابعی نزولی است، به این معنی که با افزایش مقدار β، میزان عدم قطعیت کاهش می‌یابد؛ به‌عبارت‌دیگر، با افزایش مقدار پارامتر شکل β، پیش‌بینی پذیری درباره طول عمر سیستم بهتر می‌شود.



شکل ۱.

نمودار $J(T)$ نسبت به پارامتر β با فرض توزیع وایبول برای برخی مقادیر α وقتی $\beta>1$

در ادامه، برخی نتایج در مورد خواص ترتیب توزیع‌ها با اثر مشخصه یکسان و توزیع طول عمر اجزای مختلف در اکستروپی طول عمر سیستم‌های منسجم ارائه خواهیم داد. قبل از ارائه نتایج اصلی، مفهوم ترتیب تصادفی پراکندگی بین متغیرهای تصادفی را بیان خواهیم کرد که برای بیشترین جزئیات در این زمینه، به شیکد و شانتیکومار [۹] ارجاع می‌دهیم. همچنین ترتیب تصادفی اکستروپی را نیز معرفی می‌کنیم.



شکل ۱: سیستم منسجم پل با اثر مشخصه $\mathbf{s}=(0,\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5},0)$

در این مقاله، اصطلاحات «صعودی» و «نزولی» به ترتیب به معنای «غیرنزولی» و «غیرصعودی» استفاده می‌شوند.

تعریف ۳.۲. *متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب با توابع توزیع F و G و توابع چگالی احتمال f و g را در نظر بگیرید. آنگاه*

۱. *X را در ترتیب تصادفی اکستروپی کوچک‌تر از Y گویند (که آن را با نماد $X \le_{ext} Y$ نمایش می‌دهند) هرگاه $J(X) \le J(Y)$.*

۲. *X را در ترتیب تصادفی پراکندگی کوچک‌تر از Y گویند (که آن را با نماد $X \le_d Y$ نمایش می‌دهند) هرگاه برای هر $0 < u \le v < 1$ داشته باشیم*
$$F^{-1}(v)-F^{-1}(u) \le G^{-1}(v)-G^{-1}(u),$$
یا به‌طور معادل برای هر $u \in (0,1)$،
$$g(G^{-1}(u)) \le f(F^{-1}(u)), \qquad (۹)$$
برقرار باشد.

به‌طور مشابه برای حالت گسسته، می‌توان به‌صورت زیر ترتیب تصادفی معمولی را تعریف کرد.

تعریف ۴.۲. *فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته به ترتیب با بردارهای احتمال $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)$ و $\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_n)$ باشند که مقادیری در مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌گیرند. آنگاه گوییم X در ترتیب تصادفی معمولی کوچک‌تر از Y است هرگاه $\sum_{j=i}^{n} p_j \le \sum_{j=i}^{n} q_j$ به ازای هر $i=1,\cdots,n$ و به‌صورت $\boldsymbol{p} \le_{st} \boldsymbol{q}$ نمایش می‌دهند.*

لازم به یادآوری است که اگر $X \le_{ext} Y$ باشد، به این معناست که ما توانایی کمی برای پیش‌بینی نتیجه آینده متغیر تصادفی Y نسبت به پیش‌بینی نتیجه X را بر اساس اکستروپی داریم. عبارت (۶) برای مقایسه‌ی عدم قطعیت دو سیستم منسجم با ساختارهای یکسان مفید می‌باشد. برای نشان دادن این مطلب، قضیه‌ی زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیهٔ ۵.۲. *فرض کنید که T^X و T^Y طول عمر دو سیستم منسجم با ساختارهای یکسان باشند. همچنین فرض کنید طول عمر مؤلفه‌های سیستم مستقل و هم‌توزیع به ترتیب با توابع توزیع F و G و توابع چگالی احتمال f و g باشند. اگر $X \le_d Y$ باشد، آنگاه $T^X \le_{ext} T^Y$.*

اثبات. با توجه به داشتن ساختار یکسان و در نتیجه اثر مشخصه یکسان هر دو سیستم و فرض $X \le_d Y$، از عبارات (۶) و (۹) داریم:
$$-2J(T^X)+2J(T^Y)=\int_0^1 g_V^2(v)\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \ge 0.$$
بنابراین، نتیجه‌ی موردنظر به دست می‌آید و برهان کامل می‌شود. □

اکنون قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۶.۲. *تحت شرایط قضیه ۵.۲، فرض کنید $X \le_{ext} Y$ و همچنین*
$$A_1=\left\{0<v<1 \,\middle|\, \frac{g(G^{-1}(v))}{f(F^{-1}(v))}<1\right\},\ A_2=\left\{0<v<1 \,\middle|\, \frac{g(G^{-1}(v))}{f(F^{-1}(v))}\ge 1\right\}$$
تعریف‌شده است. اگر $A_2=\phi$ یا $\inf_{A_1} g_V(v) \ge \sup_{A_2} g_V(v)$، آنگاه $T^X \le_{ext} T^Y$.

اثبات. اگر $A_2=\phi$، آنگاه نتیجه واضح است. اکنون فرض کنید $A_2 \neq \phi$. ازآنجایی‌که $X \le_{ext} Y$، از عبارت (۶) داریم:
$$\int_0^1 \left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \ge 0, \qquad (۱۰)$$
با در نظر گرفتن
$$-2J(T^X)+2J(T^Y) = \int_0^1 g_V^2(v)\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv$$

داریم:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 g_V^2(v)\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \\
&= \int_{A_1} g_V^2(v)\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \\
&+ \int_{A_2} g_V^2(v)\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \\
&\geq \left(\inf_{A_1} g_V(v)\right)^2 \int_{A_1}\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \\
&+ \left(\sup_{A_2} g_V(v)\right)^2 \int_{A_2}\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \\
&\geq \left(\sup_{A_2} g_V(v)\right)^2 \int_{A_1}\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \\
&+ \left(\sup_{A_2} g_V(v)\right)^2 \int_{A_2}\left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \\
&= \left(\sup_{A_2} g_V(v)\right)^2 \int_0^1 \left(f(F^{-1}(v))-g(G^{-1}(v))\right)dv \geq 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

نابرابری دوم در (۱۱) با توجه به اینکه $\inf_{A_1} g_V(v) \geq \sup_{A_2} g_V(v)$ به دست می‌آید و در نتیجه برهان کامل می‌شود. □

۳ کران‌های پایین اکستروپی طول عمر سیستم منسجم

در مواقعی که ساختار سیستم مهندسی دارای پیچیدگی بالا و تعداد زیادی مؤلفه باشد، محاسبه $J(T)$ دشوار یا بسیار وقت‌گیر است. این وضعیت در عمل بسیار رایج است. در چنین شرایطی، استفاده از کران‌های اکستروپی می‌تواند برای پی بردن به رفتار عدم قطعیت طول عمر سیستم منسجم از منظر اکستروپی مفید باشد.

برای آشنایی با تحقیقات اخیر در مورد کران‌های عدم قطعیت طول عمر سیستم‌های منسجم، می‌توانید به منابع [۱۱] و [۱۲] مراجعه کنید. در قضیه بعدی، یک کران پایین برای اکستروپی طول عمر سیستم منسجم برحسب $J(X)$ ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۱.۳. *فرض کنید T طول عمر یک سیستم منسجم شامل n مؤلفه مستقل و هم توزیع با طول عمرهای $X_1,\dots,X_n$ و دارای تابع توزیع مشترک F و تابع چگالی احتمال f باشد. همچنین فرض کنید اثرمشخصه سیستم $\mathbf{s}=(s_1,\cdots,s_n)$ باشد. با فرض اینکه $J(T)<\infty$، در این صورت داریم*

$$J(T) \geq (D(\mathbf{s}))^2 J(X), \tag{12}$$

که در آن $D(\mathbf{s})=\sum_{i=1}^n s_i g_i(m_i)$، به‌طوری‌که $m_i=\frac{i-1}{n-1}$ مد یا نمای تابع چگالی بتا می‌باشد.

اثبات. به‌راحتی می‌توان نشان داد که مد یا نمای توزیع بتا با پارامترهای i و $n-i+1$ برابر است با $m_i=\frac{i-1}{n-1}$، بنابراین داریم:

$$g_V(v) \leq \sum_{i=1}^n s_i g_i(m_i) = D(\mathbf{s}),\ 0<v<1.$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
-2J(T) &= \int_0^1 g_V^2(v) f(F^{-1}(v))dv \\
&\leq (D(\mathbf{s}))^2 \int_0^1 f(F^{-1}(v))dv \\
&= -2\,(D(\mathbf{s}))^2 J(X).
\end{aligned}$$

برابری آخر از رابطه (۱) به دست آمد و در نتیجه قضیه اثبات گردید. □

کران داده‌شده در (۱۲) زمانی بسیار ارزشمند است که تعداد اجزا زیاد یا ساختار سیستم پیچیده باشد. اکنون، با استفاده از ویژگی‌های معیار اطلاعاتی اکستروپی و مفاهیم ریاضی، یک کران پایین عمومی به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۲.۳. *تحت شرایط قضیه ۱.۳، داریم:*

$$J(T) \geq J^L(T), \tag{13}$$

که در آن $J^L(T)=\sum_{i=1}^n s_i J(X_{i:n})$ است.

اثبات. با توجه به محدب بودن تابع t^2 و با استفاده از نابرابری جنسن، بنابراین می‌توان نشان داد:

$$\left(\sum_{i=1}^n s_i f_{i:n}(x)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n s_i f_{i:n}^2(x),\ x>0,$$

و در نتیجه داریم:

$$\int_0^\infty f_T^2(x)dx \leq \left(\sum_{i=1}^n s_i \int_0^\infty f_{i:n}^2(x)dx\right). \tag{14}$$

با ضرب عبارت $-1/2$ در طرفین رابطه (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned}
J(T) &\geq -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n s_i \int_0^\infty f_{i:n}^2(x)dx \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n s_i \int_0^\infty f_{i:n}^2(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n s_i \left[-\frac{1}{2}\int_0^\infty f_{i:n}^2(x)dx\right] \\
&= \sum_{i=1}^n s_i J(X_{i:n}),
\end{aligned}$$

و در نتیجه قضیه اثبات می‌گردد. □

مثال زیر کاربرد قضیه‌های فوق را بیان می‌کند.

مثال ۳.۳. *فرض کنید T طول عمر یک سیستم منسجم با اثرمشخصه $\mathrm{s}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$ متشکل از $n=3$ مؤلفه مستقل و هم‌توزیع را نشان دهد. طول عمر مؤلفه‌ها دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ باشند. ازآنجایی‌که $m_1=0$ و $m_2=\frac{1}{2}$، بنابراین داریم: $g_1(m_1)=3$ و $g_2(m_2)=\frac{3}{2}$. در نتیجه عبارت زیر به‌راحتی به دست می‌آید:*

$$D(\mathrm{s})=\sum_{i=1}^{3}s_i g_i(m_i)=\frac{1}{3}g_1(m_1)+\frac{2}{3}g_2(m_2)=2.$$

ازآنجایی‌که $J(X)=-\frac{\lambda}{4}$، با توجه به قضیه ۱.۳، اکستروپی T به‌صورت زیر از پایین کران‌دار است:

$$J(T)\geq-\lambda. \qquad (15)$$

علاوه بر این، می‌توان نشان داد که

$$J(X_{i:n})=-\frac{\lambda B(2i-1,2(n-i+1))}{2B^{2}(i,n-i+1)}.$$

ازآنجایی‌که $\sum_{i=1}^{n}s_iJ(X_{i:n})=-0/458\lambda$، ازاین‌رو، کران پایینی که در رابطه (۱۳) ارائه‌شده است، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$J(T)\geq-0/458\lambda. \qquad (16)$$

همان‌طور که قابل‌مشاهده است، کران پایین ارائه‌شده در رابطه (۱۶) بهتر از کران پایینی است که توسط رابطه (۱۵) ارائه‌شده است.

۴ انتخاب سیستم ارجح

مهندسان سیستم‌های مهندسی به دنبال طراحی سیستم‌هایی هستند که قابلیت اعتماد بالایی داشته باشند. در انتخاب ساختار از بین دو ساختار سری و موازی با مشخصه‌های مؤلفه‌ای یکسان (مؤلفه‌های دو سیستم ویژگی‌های یکسانی همچون مستقل، وابسته یا هم توزیع بودن داشته باشند)، سیستم موازی به سیستم سری ازنظر ساختاری ارجحیت دارد. باید این نکته موردتوجه قرار بگیرد که برای مقایسه‌ی ساختاری دو سیستم، ویژگی‌های طول عمر هر دو سیستم باید در شرایط یکسان باشند یعنی به‌عنوان‌مثال توزیع طول عمر مؤلفه‌ها باید مستقل و هم توزیع باشند. بر این اساس، سیستم سری با مؤلفه‌های باقابلیت اعتماد بالا ممکن است که قابلیت اعتماد بیشتری نسبت به سیستم موازی با مؤلفه‌های باقابلیت اعتماد پایین داشته باشد گرچه ساختار سیستم موازی به ساختار سیستم سری ارجحیت دارد. لذا وقتی مشخصه‌های دو سیستم یکسان باشند، هرگونه تفاوت احتمالی سیستم‌ها به ساختار و طرح سیستم مربوط می‌شود. تاکنون از ترتیب‌های تصادفی برای انتخاب سیستم بهینه برای اهداف گوناگون استفاده می‌شد. به‌عنوان‌مثال از ترتیب‌های تصادفی معمولی، نرخ خطر و درستنمایی ماکسیمم و ترتیب‌های دیگر برای انتخاب یک سیستم باقابلیت اعتماد بالا از بین دو سیستم استفاده می‌شد؛ اما محدودیت‌هایی که ترتیب‌های تصادفی در مرتب کردن توزیع طول عمر سیستم‌ها ازنظر احتمالی دارند، انگیزه‌ای برای یافتن روش‌های دیگر برای مرتب کردن طول عمر سیستم‌ها ایجاد می‌کند (رجوع شود به کوچار و همکاران [۵]). می‌دانیم که قابلیت اعتماد هر سیستم دلخواه، بین قابلیت اعتماد سیستم‌های سری و موازی است یعنی

$$P(X_{1:n}>t)\leq P(T>t)\leq P(X_{n:n}>t),\ t>0.$$

بنابراین، به‌جای مقایسه زوجی سیستم‌ها، می‌توانیم سیستمی را پیدا کنیم که ساختار یا توزیع آن بیشتر شبیه به سیستم موازی باشد؛ به‌عبارت‌دیگر، ما به دنبال پاسخ به این سؤال هستیم که کدام‌یک از این سیستم‌ها بیشتر شبیه (نزدیک) به پیکربندی سیستم موازی و دور از پیکربندی سیستم سری هستند؟ برای پرداختن به این سؤال از معیار اکستروپی نسبی استفاده خواهیم کرد. به یاد می‌آوریم که اکستروپی نسبی $f(x)$ نسبت به $g(x)$ به‌صورت زیر تعریف‌شده است (به لد و همکاران [۶] مراجعه کنید)

$$D(X:Y)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}[f(x)-g(x)]^{2}\mathrm{d}x\geq 0, \qquad (17)$$

به شرطی که انتگرال متناهی باشد. برابری برقرار است اگر و فقط اگر $f(x)=g(x)$ تقریباً در همه‌جا برقرار باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

$$D(T:X_{1:n}) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left[f_T(x)-f_{X_{1:n}}(x)\right]^{2}dx, \qquad (18)$$
$$D(T:X_{n:n}) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left[f_T(x)-f_{X_{n:n}}(x)\right]^{2}dx \qquad (19)$$

مقادیر بزرگ (کوچک) $D(T:X_{n:n})$ ($D(T:X_{1:n})$)، نشان می‌دهد که توزیع طول عمر باقیمانده سیستم منسجم T با توزیع طول عمر باقیمانده سیستم موازی فاصله زیادی دارد و بنابراین ترجیح داده نمی‌شود. اجازه دهید معیار سیستم ترجیحی را به‌صورت تعریف کنیم

$$\mathcal{SJ}(T)=\frac{D(T:X_{1:n})-D(T:X_{n:n})}{D(T:X_{1:n})+D(T:X_{n:n})}, \qquad (20)$$

واضح است که $-1\leq\mathcal{SJ}(T)\leq 1$؛ بنابراین، می‌توان گفت که $\mathcal{SJ}(T)=1$ اگر و فقط اگر $T=X_{n:n}$ و $\mathcal{SJ}(T)=-1$ اگر و فقط اگر $T=X_{1:n}$. به‌عبارت‌دیگر، اگر $\mathcal{SJ}(T)$ به ۱ نزدیک‌تر باشد،

توزیع T به توزیع سیستم موازی نزدیک‌تر است و اگر $\mathcal{SJ}(T)$ به -1 نزدیک‌تر باشد، توزیع T نزدیک‌تر به توزیع سیستم سری است. بیان این نکته مفید است که بدانیم (۲۰) به اثرمشخصه‌ی سیستم و توزیع مؤلفه‌ها بستگی دارد. حال تعریف زیر را برای انتخاب یک سیستم ارجح پیشنهاد می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. *فرض کنید T_1 و T_2 طول عمر دو سیستم منسجم n مؤلفه‌ای با مؤلفه‌های مستقل و هم توزیع و اثرمشخصه‌های به ترتیب $\mathbf{s}_1$ و $\mathbf{s}_2$ باشند. گوییم که T_2 ازنظر اکستروپی نسبی REX ارجح‌تر از T_1 است و با $T_1 \leq_{REX} T_2$ نشان داده می‌شود اگر و فقط اگر $\mathcal{SJ}(T_1) \leq \mathcal{SJ}(T_2)$.*

با استفاده از تغییر متغیر $u = F(x)$ معادله‌های (۱۸) و (۱۹) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$D(T : X_{1:n}) = \frac{1}{2}\int_0^1 [g_V(v) - g_1(v)]^2 f(F(v))dv,$$
$$D(T : X_{n:n}) = \frac{1}{2}\int_0^1 [g_V(v) - g_n(v)]^2 f(F(v))dv.$$

به‌عنوان یک کاربرد از معیار پیشنهادی فوق، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲.۴. *فرض کنید T_1 و T_2 طول عمر دو سیستم منسجم به ترتیب با اثر مشخصه‌های $\mathbf{s}_1 = (1/4, 1/4, 1/2, 0)$ و $\mathbf{s}_2 = (0, 2/3, 1/3, 0)$ باشند. همچنین فرض کنید که طول عمر مؤلفه‌های سیستم مستقل و هم توزیع از توزیع نمایی استاندارد با تابع بقا $\overline{F}(x) = e^{-x}$ $x > 0$ باشند. در جدول ۱ مقایسه ترتیب تصادفی معمولی برای دو اثرمشخصه سیستم صورت‌گرفته است. واضح است که این دو اثرمشخصه بر اساس ترتیب تصادفی معمولی قابل‌مقایسه نیستند یعنی داریم: $\mathbf{s}_1 \nleq_{st} \mathbf{s}_2$.*

جدول ۱. مقایسه ترتیب تصادفی معمولی

i	$\sum_{j=i}^{4} s_{1j}$	$\sum_{j=i}^{4} s_{2j}$	$\sum_{j=i}^{4} s_{1j} \leq \sum_{j=i}^{4} s_{2j}$
۱	۱	۱	$\sum_{j=1}^{4} s_{1j} = \sum_{j=1}^{4} s_{2j}$
۲	۳/۴	۱	$\sum_{j=2}^{4} s_{1j} < \sum_{j=2}^{4} s_{2j}$
۳	۱/۲	۱/۳	$\sum_{j=3}^{4} s_{1j} > \sum_{j=3}^{4} s_{2j}$
۴	۰	۰	$\sum_{j=4}^{4} s_{1j} = \sum_{j=4}^{4} s_{2j}$

بااین‌حال با توجه رابطه (۲۰)، داریم:
$\mathcal{SJ}(T_1) = 0/4117$ و $\mathcal{SJ}(T_2) = 0/5172$. بنابراین به‌راحتی مشاهده می‌کنیم که $T_1 \leq_{REX} T_2$. به‌عبارت‌دیگر، سیستم با طول عمر T_2 بیشتر به سیستم موازی نزدیک است و لذا سیستم ارجح‌تری نسبت به سیستم با طول عمر T_1 است.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در سال‌های اخیر علاقه به اندازه‌گیری عدم قطعیت مرتبط با طول عمر سیستم‌های مهندسی افزایش‌یافته است. ارزیابی قابلیت پیش‌بینی در طول عمر یک سیستم را می‌توان از طریق این معیارها تعیین کرد. اکستروپی به‌عنوان بسط آنتروپی شانون در چنین شرایطی بسیار جذاب است. در این مقاله، ما یک عبارت برای اکستروپی طول عمر سیستم را تحت شرایطی به دست آورده‌ایم که طول عمر مؤلفه‌های سیستم مستقل و هم توزیع بودند. خواص مختلف معیار پیشنهادی نیز موردبررسی قرارگرفت. برخی از کران‌ها به‌دست‌آمده‌اند و ترتیبات جزئی بین طول عمر دو سیستم منسجم ازنظر عدم قطعیت اکستروپی آن‌ها با استفاده از مفهوم اثرمشخصه‌ی سیستم موردبررسی قرارگرفته است. چندین مثال برای نشان دادن نتایج نیز ارائه‌شده است. در نهایت، بر اساس اکستروپی نسبی، معیاری را برای انتخاب یک سیستم ترجیحی که ارتباط نزدیکی با سیستم موازی دارد، معرفی کردیم. نتایج این مقاله را می‌توان برای معیار عدم قطعیت دیگر نیز تعمیم داد.

مراجع

[1] Abbasnejad, M. and Arghami, N. R. (2011) Renyi entropy properties of order statistics. *Commun. Stat. Theory Methods.* **40**, pp. 40-52.

[2] Baratpour, S. and Khammar, A. (2016). Tsallis entropy properties of order statistics and some stochastic comparison, *Journal of statistical physics*, **52**, 479–487.

[3] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life testing*, New York: Holt, Rinehart and Winston.

[4] Ebrahimi, N., Soofi, E. S. and Zahedi, H. (2004) Information properties of order statistics and spacings, *Commun. Stat. Theory Methods.* **40**, pp. 40-52.

[5] Kochar, S. C., Mukerjee, H. and Samaniego, F. J. (1999) The signature of a coherent system and its application to comparisons among systems. *Naval Research Logistics* **4**, pp. 507-523.

[6] Lad, F., Sanfilippo, G. and Agro, G. and others (2015) Extropy: complementary dual of entropy, *Statistical Science*, **30(1)**, 40–58.

[7] Qiu, Q., Wang, L. and Wang, X. (2019) On extropy properties of mixed systems, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **33(3)**, 471–486.

[8] Samaniego, F. J. (2007). *System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability*, New York: Springer, International series in operations research and management science, 110.

[9] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic orders.*, Springer Science and Business Media, 2007.

[10] Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication, *The Bell system technical journal*, **27(3)**, 379–423.

[11] Toomaj, A. and Doostparast, M. (2014). A note on signature-based expressions for the entropy of mixed r-out-of-n systems, *Naval Research Logistics*, **61(3)**, 202–206.

[12] Toomaj, A. (2017). Renyi entropy properties of mixed systems, *Communications in StatisticsTheory and Methods*, **46(2)**, 906–916.

[13] Tsallis, C. (1988). Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics., *Journal of statistical physics*, **52**, 479–487.

[14] Wong, K. M. and Chen, SH. (1990).The entropy of ordered sequences and order statistics, *IEEE Transactions on Information Theory*, **36**, 276–284.

Extropy of coherent system's lifetime and its application in selecting the preferred system

Abstract:

This paper explores some extropy properties of the lifetime of coherent systems under the assumption that the lifetime distribution of system components is independent and identically distributed. The presented results are obtained using the concept of system signature. To this end, we first provide an expression for the extropy of the lifetime of coherent systems. Then, stochastic extropy comparisons are discussed for coherent systems under the condition that both systems have the same characteristic structure. In cases where the number of system components is large or the system has a complex structure, obtaining the exact extropy value of the system lifetime is difficult or time-consuming. Therefore, bounds are also obtained for extropy. Additionally, a new criterion for selecting a preferred system based on relative extropy is proposed, which considers the lifetime of the desired system closest to the parallel system.

Keywords: Extropy, Relative extropy, System signature, Stochastic orders, Coherent system.