استنباط آماری پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای در توزیع وایبول سه پارامتری

عاطفه کرمی[۱]، اکرم کهن‌سال[۲]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۱۹

چکیده:
استنباط آماری پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای، $R_{s,k}$، در یک توزیع وایبول سه پارامتری بررسی می‌شود. مسئله در دو حالت مختلف موردمطالعه قرار می‌گیرد. در حالت اول، با فرض اینکه متغیرهای تنش و مقاومت هر دو دارای پارامتر شکل و مکان مشترک و پارامترهای مقیاس غیرمشترک هستند و تمام این پارامترها نامعلوم‌اند، برآورد درستنمایی ماکسیمم و برآورد بیزی پارامتر $R_{s,k}$ بررسی می‌شود. در این حالت، از آنجائی که برآورد بیزی دارای فرم بسته نمی‌باشد، با دو روش لیندلی و MCMC تقریب زده می‌شود. همچنین فواصل اطمینان مجانبی به‌دست‌آمده است. در حالت دوم، با فرض اینکه متغیرهای تنش و مقاومت دارای پارامتر شکل و مکان مشترک معلوم و پارامترهای مقیاس غیرمشترک و نامعلوم هستند، برآورد درستنمایی ماکسیمم، برآورد نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم، برآورد دقیق بیزی پارامتر $R_{s,k}$ و نیز فاصله اطمینان مجانبی محاسبه می‌شود. درنهایت، با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو، عملکرد برآوردگرهای مختلف باهم مقایسه شده‌اند.
واژه‌های کلیدی: پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای، برآورد بیز، تقریب لیندلی، توزیع وایبول سه پارامتری.

۱ مقدمه

در نظریه قابلیت اعتماد، توزیع وایبول یکی از پرکاربردترین توزیع‌های طول عمر نسبت به توزیع‌های دیگر است. از آنجائی که تابع نرخ شکست توزیع وایبول با توجه به پارامترهای این توزیع می‌تواند صعودی، نزولی یا ثابت باشد، لذا این توزیع انعطاف‌پذیری بسیار زیادی در برازش داده‌های واقعی دارد و به‌راحتی می‌توان داده‌های کاربردی زیادی را به کمک آن توصیف کرد. توزیع وایبول سه پارامتری که در این مقاله به آن توجه شده است، حالت کلی‌تری از توزیع وایبول معمولی است که با اضافه کردن یک پارامتر مکانی به این توزیع به‌دست‌آمده است. لذا نتایج حاصل‌شده در این مقاله حالت‌های مختلفی را شامل می‌شود. در حالت کلی توزیع وایبول سه پارامتری با پارامترهای به ترتیب مقیاس، شکل و مکان γ، α و θ، دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به شرح زیر است:

$$f(x) = \alpha\gamma(x-\theta)^{\alpha-1}e^{-\gamma(x-\theta)^{\alpha}}, \quad x>\theta, \qquad (1)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\gamma(x-\theta)^{\alpha}}, \qquad x>\theta. \qquad (2)$$

در ادامه توزیع فوق را با نماد $TpW(\gamma,\alpha,\theta)$ نشان می‌دهیم. واضح است که با تنظیم کردن پارامترهای مختلف می‌توان توزیع‌های متفاوتی مانند توزیع وایبول دو پارامتری، توزیع رایلی و توزیع نمائی را از آن به دست آورد، برای مطالعه بیشتر به کهن‌سال و شعاعی [۱] مراجعه کنید. در سال‌های اخیر توجه زیادی به مدل‌های تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای شده است. یک سیستم چند مؤلفه‌ای از یک مؤلفه تنش و k مؤلفه مستقل مقاومت تشکیل‌شده است. این سیستم زمانی در دسترس است که تعداد s مؤلفه از k مؤلفه مقاومت ($1 \leq s \leq k$) به‌طور هم‌زمان باقی بمانند. در دنیای واقعی موارد زیادی وجود دارند که می‌توانند به کمک این نوع مدل‌ها توصیف شوند. برای مثال، در یک پل معلق، نیروی باد، ترافیک وسایل نقلیه، خوردگی پل و غیره می‌توانند به‌عنوان متغیرهای تنش و تعداد کابل‌های عمودی نگهدارنده پل، k، می‌تواند به‌عنوان متغیر مقاومت در نظر گرفته شوند. این پل تنها در صورتی کار می‌کند که حداقل تعداد کابل عمودی فعال برابر s باشد. به‌عنوان مثالی دیگر، اتومبیلی را در نظر بگیرید که دارای ۸ موتور است و برای روشن شدن این اتومبیل باید حداقل ۴ موتور کار کند. در این مثال احتمال کار کردن حداقل ۴ موتور از ۸ موتور، احتمال روشن شدن اتومبیل

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران
[۲] دانشیار گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران (نویسنده مسئول: kohansal@sci.ikiu.ac.ir)

است. باتاچاریا و جانسون [۳] پارامتر قابلیت اعتماد چند مؤلفه‌ای را به‌صورت زیر ارائه کرده‌اند:

$$R_{s,k} = P\Big((X_1, \cdots, X_k) \text{ از } s \text{ تا حداقل } > Y\Big), \qquad (3)$$

که در آن $(X_1, \cdots, X_k)$ متغیرهای مقاومت مستقل هستند و همگی دارای تابع توزیع تجمعی $F_X(\cdot)$ می‌باشند. همچنین Y یک متغیر تصادفی تنش با تابع توزیع تجمعی $F_Y(\cdot)$ است. در سال‌های اخیر نویسندگان بسیاری به برآورد مدل تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای پرداخته‌اند که از آن جمله عبارت‌اند از کهن‌سال [۶]، کهن‌سال و شعاعی [۷]، احمدی و غفوری [۲].

در این مقاله برآورد پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای در توزیع وایبول سه پارامتری بررسی می‌شود. در ادامه در بخش ۲ مقاله، وقتی متغیرهای تنش و مقاومت دارای پارامترهای شکل و مکان مشترک و پارامتر مقیاس غیرمشترک هستند، درحالی‌که تمام این پارامترها نامعلوم‌اند، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم و بیزی و نیز فاصله اطمینان مجانبی پارامتر $R_{s,k}$ به‌دست‌آمده است. برای یافتن برآورد درستنمایی ماکسیمم (MLE)، معادلات غیرخطی از روش نیوتن رافسون حل‌شده و نیز برای یافتن برآورد بیزی، به دلیل عدم وجود فرم بسته، از روش‌های تقریبی لیندلی و نیز MCMC استفاده‌شده است. در بخش ۳ استنباط آماری پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای، وقتی متغیرهای تنش و مقاومت دارای پارامترهای شکل و مکان مشترک و نامعلوم و پارامتر مقیاس غیرمشترک و معلوم هستند، انجام‌شده است. از برآوردهای این بخش می‌توان به MLE، بیز و برآورد نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم (UMVUE) و فاصله اطمینان مجانبی اشاره کرد. در بخش ۴ مقاله نیز نتایج شبیه‌سازی ارائه و درنهایت نتیجه‌گیری در بخش ۵ صورت می‌گیرد.

۲ برآورد پارامتر $R_{s,k}$ با θ و α مشترک و نامعلوم

۱.۲ برآورد MLE

فرض کنید $X \sim TpW(\gamma_1, \alpha, \theta)$ و $Y \sim TpW(\gamma_2, \alpha, \theta)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند. برای توزیع وایبول سه پارامتری با استفاده از روابط (۱) و (۲)، پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
R_{s,k} &= \sum_{p=s}^{k} \binom{k}{p} \int_{\theta}^{\infty} (1 - F_X(y))^p \times (F_X(y))^{k-p} f_Y(y) dy \\
&= \sum_{p=s}^{k} \binom{k}{p} \int_{\theta}^{\infty} \alpha\gamma_2 e^{-(\gamma_1 p+\gamma_2)(y-\theta)^\alpha} \\
&\times (1 - e^{-\gamma_1 (y-\theta)^\alpha})^{k-p} (y-\theta)^{\alpha-1} dy \\
&= \sum_{p=s}^{k} \binom{k}{p} \int_{0}^{\infty} \gamma_2 e^{-(\gamma_1 p+\gamma_2)t} (1 - e^{-\gamma_1 t})^{k-p} dt \\
&= \sum_{p=s}^{k} \binom{k}{p} \binom{k-p}{q} (-1)^q \int_{0}^{\infty} \gamma_2 e^{-(\gamma_1 (p+q)+\gamma_2)t} dt \\
&= \sum_{p=s}^{k} \binom{k}{p} \binom{k-p}{q} (-1)^q \frac{(-1)^q \gamma_2}{\gamma_1 (p+q) + \gamma_2}.
\end{aligned}$$

برای به دست آوردن MLE پارامتر $R_{s,k}$، ابتدا باید برآورد MLE پارامترهای γ_1، γ_2، α و θ را محاسبه کرد. برای ساختن تابع درستنمایی، می‌توان مشاهدات را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\overset{\text{تنش مشاهده‌شده}}{\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}} \quad \text{و} \quad \overset{\text{مقاومت مشاهده‌شده}}{\begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix}},$$

که در آن $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ یک نمونه از $TpW(\gamma_2, \alpha, \theta)$ و همچنین $\{X_{i1}, \cdots, X_{ik}\},\ i = 1, \cdots, n$ یک نمونه از $TpW(\gamma_1, \alpha, \theta)$ است، بنابراین، تابع درستنمایی γ_1، γ_2، α و θ را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد:

$$L(\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \big(\prod_{j=1}^{k} f_X(x_{ij})\big) f_Y(y_i),$$

لذا تابع درستنمایی بر مبنای مشاهدات به‌صورت

$$\begin{aligned}
L(data|\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \theta) &= \alpha^{n(k+1)} \gamma_1^{nk} \gamma_2^{n} \prod_{i=1}^{n} e^{-\gamma_2 (y_i - \theta)^\alpha} \\
&\times \prod_{i=1}^{n} (y_i - \theta)^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} e^{-\gamma_1 (x_{ij}-\theta)^\alpha} \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} (x_{ij} - \theta)^{\alpha-1} \\
&\times I(\theta < \min\{\min_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le k}} x_{ij}, \min_{1\le i\le n} y_i\}) \\
&= \alpha^{n(k+1)} \gamma_1^{nk} \gamma_2^{n} \big(\prod_{i=1}^{n} e^{-\gamma_2 (y_i-\theta)^\alpha} \prod_{i=1}^{n} (y_i - \theta)^{\alpha-1}\big) I(\theta < y_i) \\
&\times \big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} e^{-\gamma_1 (x_{ij}-\theta)^\alpha} \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} (x_{ij} - \theta)^{\alpha-1}\big) I(\theta < x_{ij}),
\end{aligned}$$

است که در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر است و

$$I(\theta \in A) = \begin{cases} 1 & \theta \in A, \\ 0 & \theta \notin A. \end{cases}$$

درنتیجه، تابع لگ-درستنمایی به‌صورت

$$\ell(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)\propto n(k+1)\log\alpha-\gamma_2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha}I(\theta<y_i)$$
$$-\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha}I(\theta<x_{ij})$$
$$+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log(y_i-\theta)I(\theta<y_i)$$
$$+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\log(x_{ij}-\theta)I(\theta<x_{ij})$$
$$+n\log\gamma_2+nk\log\gamma_1,$$

به دست می‌آید؛ بنابراین، MLE پارامترهای γ_1 و γ_2 به ترتیب به فرم زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\gamma}_1=nk\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha}I(\theta<x_{ij})\Big)^{-1},$$
$$\hat{\gamma}_2=nk\Big(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha}I(\theta<y_i)\Big)^{-1}.$$

همچنین $\hat{\alpha}$ و $\hat{\theta}$، به ترتیب با حل معادلات غیرخطی (۴) و (۵) زیر به یک روش عددی مانند روش نیوتن رافسون به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\alpha}=\frac{n(k+1)}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\log(y_i-\theta)I(\theta<y_i)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\log(x_{ij}-\theta)I(\theta<x_{ij})$$
$$-\gamma_2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha}\log(y_i-\theta)^{\alpha}I(\theta<y_i)$$
$$-\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha}\log(x_{ij}-\theta)=0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta}=-(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(y_i-\theta)}I(\theta<y_i)$$
$$-(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(x_{ij}-\theta)}I(\theta<x_{ij})$$
$$+\alpha\gamma_2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-1}I(\theta<y_i)$$
$$+\alpha\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-1}I(\theta<x_{ij})=0. \quad (5)$$

پس از محاسبه مقادیر برآوردهای درستنمایی ماکسیمم پارامترهای موجود، طبق خاصیت پایایی، MLE پارامتر $R_{s,k}$ برابر می‌شود با

$$\hat{R}^{MLE}_{s,k}=\sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}\frac{(-1)^q\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_1(p+q)+\hat{\gamma}_2}. \quad (6)$$

۲.۲ بازه اطمینان مجانبی

در این بخش، فاصله اطمینان مجانبی $R_{s,k}$ را به دست می‌آوریم. برای رسیدن به این هدف، ابتدا با استفاده از قضیه حد مرکزی چند متغیره، توزیع مجانبی پارامترهای نامعلوم، یعنی $(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)$ را حساب می‌کنیم و سپس با استفاده از روش دلتا، توزیع مجانبی $R_{s,k}$ را ارائه می‌دهیم.

در حالت چهار پارامتری ماتریس اطلاع فیشر مورد انتظار پارامتر $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)$ به‌وسیله $J(\eta)=-E\big(I(\eta)\big)$، حاصل می‌شود که در آن $I(\eta)=[I_{ij}]=\big[\frac{\partial^2\ell}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\big]$ ماتریس اطلاع فیشر مشاهده‌شده و $i,j=1,2,3,4$ است. در مسئله‌ای که با آن روبه‌رو هستیم، درایه‌های ماتریس متقارن اطلاع فیشر مشاهده توسط روابط زیر به دست می‌آید:

$$I_{11}=\frac{nk}{\gamma_1^2},\quad I_{12}=0,\quad I_{22}=\frac{n}{\gamma_2^2},$$
$$I_{13}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha}\log(x_{ij}-\theta)I(\theta<x_{ij}),$$
$$I_{14}=-\alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-1}I(\theta<x_{ij}),$$
$$I_{23}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha}\log(y_i-\theta)I(\theta<y_i),$$
$$I_{24}=-\alpha\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-1}I(\theta<y_i),$$
$$I_{33}=\frac{n(k+1)}{\alpha^2}+\gamma_2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha}\log^2(y_i-\theta)I(\theta<y_i)$$
$$+\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha}\log^2(x_{ij}-\theta)I(\theta<x_{ij}),$$
$$I_{34}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(y_i-\theta)}I(\theta<y_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(x_{ij}-\theta)}I(\theta<x_{ij})$$
$$-\alpha\gamma_2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-1}\log(y_i-\theta)I(\theta<y_i)$$
$$-\alpha\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-1}\log(x_{ij}-\theta)I(\theta<x_{ij})$$
$$-\gamma_2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-1}I(\theta<y_i)$$
$$-\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-1}I(\theta<x_{ij}),$$
$$I_{44}=(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(y_i-\theta)^2}I(\theta<y_i)$$
$$+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(x_{ij}-\theta)^2}I(\theta<x_{ij})$$

$$+\alpha(\alpha-1)\gamma_2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-2}I(\theta<y_i)$$
$$+\alpha(\alpha-1)\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-2}I(\theta<x_{ij}).$$

حال با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی چند متغیره،

$$(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\hat{\alpha},\hat{\theta})\sim N_4\big((\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta),I^{-1}(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)\big),$$

که $I^{-1}(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)$ یک ماتریس متقارن است که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$I^{-1}(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)=\frac{1}{|I(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)|}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ & & b_{33} & b_{34}\\ & & & b_{44}\end{bmatrix},$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned}|I(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)| &= I_{11}I_{22}I_{33}I_{44}+I_{14}^2I_{23}^2+(I_{11}I_{23}I_{24}I_{34})^2\\ &-I_{11}I_{24}^2I_{33}-I_{11}I_{23}^2I_{44}-I_{11}I_{22}I_{34}^2+I_{13}^2I_{24}^2\\ &+(I_{13}I_{14}I_{22}I_{34})^2-(I_{13}I_{14}I_{23}I_{24})^2-I_{13}^2I_{22}I_{44}-I_{14}^2I_{22}I_{33},\end{aligned}$$

و نیز

$$\begin{aligned}
b_{11}&=I_{22}I_{33}I_{44}+2I_{23}I_{24}I_{34}-I_{22}I_{34}^2-I_{23}^2I_{44}-I_{24}^2I_{33},\\
b_{12}&=I_{13}I_{23}I_{44}+I_{14}I_{24}I_{33}-I_{13}I_{24}I_{34}-I_{14}I_{23}I_{34},\\
b_{13}&=I_{13}I_{24}^2+I_{14}I_{22}I_{34}-I_{13}I_{22}I_{44}-I_{14}I_{24}I_{23},\\
b_{14}&=I_{13}I_{22}I_{34}+I_{14}I_{23}^2-I_{13}I_{23}I_{24}-I_{14}I_{22}I_{33},\\
b_{22}&=I_{11}I_{33}I_{44}+2I_{13}I_{14}I_{34}-I_{11}I_{34}^2-I_{13}^2I_{44}-I_{14}^2I_{33},\\
b_{23}&=I_{11}I_{24}I_{34}+I_{14}^2I_{23}-I_{11}I_{23}I_{44}-I_{13}I_{14}I_{24},\\
b_{24}&=I_{11}I_{23}I_{34}+I_{13}^2I_{24}-I_{11}I_{24}I_{33}-I_{13}I_{14}I_{23},\\
b_{33}&=I_{11}I_{22}I_{44}-I_{11}I_{24}^2-I_{14}^2I_{22},\\
b_{34}&=I_{11}I_{23}I_{24}+I_{13}I_{14}I_{22}-I_{11}I_{22}I_{34},\\
b_{44}&=I_{11}I_{22}I_{33}-I_{11}I_{23}^2-I_{13}^2I_{22},
\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از روش دلتا، توزیع مجانبی $\hat{R}_{s,k}^{MLE}$ می‌تواند به‌صورت $\hat{R}_{s,k}^{MLE}\sim N(R_{s,k},B)$, نتیجه شود که

$$B=\frac{1}{|I(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)|}\Big((\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_1})^2b_{11}+(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_2})^2b_{22}+2(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_1})(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_2})b_{12}\Big),$$

است و

$$\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_1}=\sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}\frac{(-1)^{q+1}\gamma_2(p+q)}{(\gamma_1(p+q)+\gamma_2)^2},$$
$$\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_2}=\sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}\frac{(-1)^{q}\gamma_1(p+q)}{(\gamma_1(p+q)+\gamma_2)^2}.$$

بنابراین، یک فاصله‌ی اطمینان مجانبی $100(1-\eta)\%$ برای $R_{s,k}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\hat{R}_{s,k}^{MLE}-z_{1-\frac{\eta}{2}}\sqrt{\hat{B}},\hat{R}_{s,k}^{MLE}+z_{1-\frac{\eta}{2}}\sqrt{\hat{B}}),\qquad(7)$$

که در آن z_η، 100η-امین چندک توزیع $N(0,1)$ است.

۳.۲ برآورد بیزی

در این بخش، درحالی‌که پارامترهای نامعلوم γ_1، γ_2، α و θ متغیرهای تصادفی مستقل هستند، استنباط بیزی پارامتر $R_{s.k}$ را بررسی می‌کنیم. این استنباط تحت تابع زیان مربعات خطا، مطالعه شده است. برای رسیدن به این هدف، فرض می‌کنیم که پارامترهای نامعلوم دارای توابع چگالی پیشین به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\gamma_1)&\propto\gamma_1^{a_1-1}e^{-b_1\gamma_1}, && \gamma_1,a_1,b_1>0,\\
\pi_2(\gamma_2)&\propto\gamma_2^{a_2-1}e^{-b_2\gamma_2}, && \gamma_2,a_2,b_2>0,\\
\pi_3(\alpha)&\propto\alpha^{a_3-1}e^{-b_3\alpha}, && \alpha,a_3,b_3>0,\\
\pi_4(\theta)&\propto 1, && 0<\theta<1.
\end{aligned}$$

دلایل انتخاب توابع چگالی پیشین را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد. از آنجائی که توابع پسین شرطی کامل پارامترهای γ_1 و γ_2 به‌صورت توزیع‌های گاما به دست می‌آیند، لذا توابع پیشین فوق مزدوج هستند. همچنین با توجه به اینکه محدوده پارامترها مثبت هستند، این انتخاب منطقی به نظر می‌رسد. علاوه‌براین با انتخاب این توابع پیشین، محاسبات کمی ساده‌تر می‌شود. تابع چگالی پسین مشترک پارامترهای نامعلوم γ_1، γ_2، α و θ بر اساس نمونه‌های مشاهده‌شده، برابر است با

$$\pi(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)\propto L(data|\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)\times\pi_1(\gamma_1)\pi_2(\gamma_2)\pi_3(\alpha)\pi_4(\theta).\qquad(8)$$

از معادله فوق، واضح است که برآورد بیزی پارامترهای مجهول و نیز پارامتر $R_{s,k}$ را نمی‌توان به فرم بسته به دست آورد؛ بنابراین، برای دستیابی به آن‌ها دو روش تقریبی زیر پیشنهادشده است:

- تقریب لیندلی،
- روش MCMC.

۱.۳.۲ تقریب لیندلی

لیندلی [۸] یکی از رایج‌ترین روش‌های عددی را برای استنباط در مورد برآورد بیزی، در سال ۱۹۸۰ ارائه داده است. فرض کنیم $U(\eta)$ تابعی از پارامتر η باشد. برآورد بیز $U(\eta)$، تحت تابع زیان مربعات خطا، برابر است با:

$$E\big(u(\eta)|data\big) = \frac{\int u(\eta) e^{\ell(\eta)+\rho(\eta)} d\eta}{\int e^{\ell(\eta)+\rho(\eta)} d\eta},$$

که در آن $\ell(\eta)$ لگاریتم تابع درستنمایی و $\rho(\eta)$ لگاریتم تابع چگالی پیشین η است؛ بنابراین تقریب لیندلی $E\big(u(\eta)|data\big)$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E\big(u(\eta)|data\big) &= u + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j (u_{ij} + 2u_i\rho_j)\sigma_{ij} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_p \ell_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kp}u_p|_{\eta=\hat{\eta}}, \end{aligned}$$

که در آن $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m)$، $i,j,k,p = 1,...,m$، $\hat{\eta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر η، $u = u(\eta)$، $u_i = \frac{\partial u}{\partial \eta_i}$، $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial\eta_i\partial\eta_j}$، $\ell_{ijk} = \frac{\partial^3 \ell}{\partial\eta_i\partial\eta_j\partial\eta_k}$ و $\rho_j = \frac{\partial\rho}{\partial\eta_j}$ است. همچنین، σ_{ij}، (i,j) امین درایه در ماتریس معکوس $[-\ell_{ij}]$ می‌باشد. در حالت چهار پارامتری $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$، جمع‌ها در رابطه اخیر به‌صورت ساده‌تر زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} E\big(u(\eta)|data\big) &= u + u_1d_1 + u_2d_2 + u_3d_3 + u_4d_4 + d_5 + d_6 \\ &+ \frac{1}{2}\big(A(u_1\sigma_{11} + u_2\sigma_{12} + u_3\sigma_{13} + u_4\sigma_{14}) \\ &+ B(u_1\sigma_{21} + u_2\sigma_{22} + u_3\sigma_{23} + u_4\sigma_{24}) \\ &+ C(u_1\sigma_{31} + u_2\sigma_{32} + u_3\sigma_{33} + u_4\sigma_{34}) \\ &+ D(u_1\sigma_{41} + u_2\sigma_{42} + u_3\sigma_{43} + u_4\sigma_{44})\big), \end{aligned}$$

که این رابطه را باید به‌وسیله $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4)$ که برآورد ماکسیمم درستنمایی $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ است، به دست آورد. در رابطه فوق

$$\begin{aligned} d_i &= \rho_1\sigma_{i1} + \rho_2\sigma_{i2} + \rho_3\sigma_{i3} + \rho_4\sigma_{i4}, \quad i = 1,2,3,4, \\ d_5 &= u_{12}\sigma_{12} + u_{13}\sigma_{13} + u_{14}\sigma_{14} + u_{23}\sigma_{23} + u_{24}\sigma_{24} + u_{34}\sigma_{34}, \\ d_6 &= \frac{1}{2}(u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22} + u_{33}\sigma_{33} + u_{44}\sigma_{44}), \end{aligned}$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} A &= \ell_{111}\sigma_{11} + 2\ell_{121}\sigma_{12} + 2\ell_{131}\sigma_{13} + 2\ell_{141}\sigma_{14} + 2\ell_{231}\sigma_{23} \\ &+ 2\ell_{241}\sigma_{24} + 2\ell_{341}\sigma_{34} + \ell_{221}\sigma_{22} + \ell_{331}\sigma_{33} + \ell_{441}\sigma_{44}, \\ B &= \ell_{112}\sigma_{11} + 2\ell_{122}\sigma_{12} + 2\ell_{132}\sigma_{13} + 2\ell_{142}\sigma_{14} + 2\ell_{232}\sigma_{23} \\ &+ 2\ell_{242}\sigma_{24} + 2\ell_{342}\sigma_{34} + \ell_{222}\sigma_{22} + \ell_{332}\sigma_{33} + \ell_{442}\sigma_{44}, \\ C &= \ell_{113}\sigma_{11} + 2\ell_{123}\sigma_{12} + 2\ell_{133}\sigma_{13} + 2\ell_{143}\sigma_{14} + 2\ell_{233}\sigma_{23} \\ &+ 2\ell_{243}\sigma_{24} + 2\ell_{343}\sigma_{34} + \ell_{223}\sigma_{22} + \ell_{333}\sigma_{33} + \ell_{443}\sigma_{44}, \\ D &= \ell_{114}\sigma_{11} + 2\ell_{124}\sigma_{12} + 2\ell_{134}\sigma_{13} + 2\ell_{144}\sigma_{14} + 2\ell_{234}\sigma_{23} \\ &+ 2\ell_{244}\sigma_{24} + 2\ell_{344}\sigma_{34} + \ell_{224}\sigma_{22} + \ell_{334}\sigma_{33} + \ell_{444}\sigma_{44}. \end{aligned}$$

حال با قرار دادن $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \theta)$ و $u = R_{s,k}$، داریم:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{a_1 - 1}{\gamma_1} - b_1, \quad \rho_2 = \frac{a_2 - 1}{\gamma_2} - b_2, \\ \rho_3 &= \frac{a_3 - 1}{\alpha} - b_3, \quad \rho_4 = 0, \end{aligned}$$

که در آن σ_{ij} به‌وسیله ℓ_{ij} و مقادیر ℓ_{ij} از I_{ij} به دست می‌آید. همچنین:

$$\begin{aligned} \ell_{111} &= \frac{2nk}{\gamma_1^3}, \quad \ell_{222} = \frac{2n}{\gamma_2^3}, \\ \ell_{133} &= -\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k (x_{ij}-\theta)^\alpha \log^2(x_{ij}-\theta) I(\theta < x_{ij}), \\ \ell_{134} &= \alpha\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k (x_{ij}-\theta)^{\alpha-1}\log(x_{ij}-\theta) I(\theta < x_{ij}) \\ &+ \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k (x_{ij}-\theta)^{\alpha-1} I(\theta < x_{ij}), \\ \ell_{144} &= -\alpha(\alpha-1)\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k (x_{ij}-\theta)^{\alpha-2} I(\theta < x_{ij}), \\ \ell_{233} &= -\sum_{i=1}^n (y_i-\theta)^\alpha \log^2(y_i-\theta) I(\theta < y_i), \\ \ell_{234} &= \alpha\sum_{i=1}^n (y_i-\theta)^{\alpha-1}\log(y_i-\theta) I(\theta < y_i) \\ &+ \sum_{i=1}^n (y_i-\theta)^{\alpha-1} I(\theta < y_i), \\ \ell_{244} &= -\alpha(\alpha-1)\sum_{i=1}^n (y_i-\theta)^{\alpha-2} I(\theta < y_i), \\ \ell_{333} &= \frac{2n(k+1)}{\alpha^3} - \gamma_2\sum_{i=1}^n (y_i-\theta)^\alpha \log^3(y_i-\theta) I(\theta < y_i) \\ &- \gamma_1\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k (x_{ij}-\theta)^\alpha \log^3(x_{ij}-\theta) I(\theta < x_{ij}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_{334} &= 2\gamma_2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-1}\log(y_i-\theta)I(\theta<y_i)\\
&+ \alpha\gamma_2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-1}\log^2(y_i-\theta)I(\theta<y_i)\\
&+ 2\gamma_1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-1}\log(x_{ij}-\theta)I(\theta<x_{ij})\\
&+ \alpha\gamma_1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-1}\log^2(x_{ij}-\theta)I(\theta<x_{ij}),\\
\ell_{443} &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(y_i-\theta)^2}I(\theta<y_i) - \sum_{j=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(x_{ij}-\theta)^2}I(\theta<x_{ij})\\
&- \gamma_2(2\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-2}I(\theta<y_i)\\
&- \gamma_2\alpha(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-2}\log(y_i-\theta)I(\theta<y_i)\\
&- \gamma_1(2\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-2}I(\theta<x_{ij})\\
&- \gamma_1\alpha(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-2}\log(x_{ij}-\theta)I(\theta<x_{ij}),\\
\ell_{444} &= -(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(y_i-\theta)^4}I(\theta<y_i)\\
&- (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(x_{ij}-\theta)^4}I(\theta<x_{ij})\\
&+ \gamma_2\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-3}I(\theta<y_i)\\
&+ \gamma_1\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-3}I(\theta<x_{ij}),
\end{aligned}$$

و نیز سایر $\ell_{ijk}=0$ می‌باشند، بنابراین:

$$\begin{aligned}
&d_i = \rho_1\sigma_{i1}+\rho_2\sigma_{i2}+\rho_3\sigma_{i3}, \quad i=1,2,3,\\
&d_5 = u_{12}\sigma_{12}, \quad d_6 = \frac{1}{2}(u_{11}\sigma_{11}+u_{22}\sigma_{22}),\\
&A = \ell_{111}\sigma_{11}+2\ell_{341}\sigma_{34}+\ell_{331}\sigma_{33}+\ell_{441}\sigma_{44},\\
&B = 2\ell_{342}\sigma_{34}+\ell_{222}\sigma_{22}+\ell_{332}\sigma_{33}+\ell_{442}\sigma_{44},\\
&C = 2\ell_{233}\sigma_{23}+2\ell_{243}\sigma_{24}+2\ell_{343}\sigma_{34}+\ell_{333}\sigma_{33}+\ell_{443}\sigma_{44},\\
&D = 2\ell_{144}\sigma_{14}+2\ell_{234}\sigma_{23}+2\ell_{344}\sigma_{34}+\ell_{334}\sigma_{33}+\ell_{444}\sigma_{44}.
\end{aligned}$$

همچنین مقادیر $u_3=u_4=0$ و $u_{i3}=u_{i4}=0$ برای $i=1,2,3,4$ و

$$u_{11} = \sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}\frac{(-1)^q 2\gamma_2(p+q)^2}{(\gamma_1(p+q)+\gamma_2)^3},$$

$$u_{12} = \sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}\frac{(-1)^{q+1}(p+q)(\gamma_1(p+q)-\gamma_2)}{(\gamma_1(p+q)+\gamma_2)^3},$$

$$u_{22} = \sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}\frac{(-1)^{q+1}2\gamma_1(p+q)}{(\gamma_1(p+q)+\gamma_2)^3},$$

می‌باشند. درنتیجه، تحت تابع زیان مربعات خطا، برآورد بیز $R_{s,k}$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{\ell in}_{s,k} &= u + (u_1 d_1 + u_2 d_2 + d_5 + d_6)\\
&+ \frac{1}{2}\big(A(u_1\sigma_{11}+u_2\sigma_{12}) + B(u_1\sigma_{21}+u_2\sigma_{22})\\
&+ C(u_1\sigma_{31}+u_2\sigma_{32}) + D(u_1\sigma_{41}+u_2\sigma_{42})\big). \qquad (9)
\end{aligned}$$

باید توجه کرد که همه پارامترها در مقادیر $(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\hat{\alpha},\hat{\theta})$، برآورد درستنمایی ماکسیمم $(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)$، محاسبه‌شده‌اند.

۲.۳.۲ روش MCMC

در این روش با استفاده از رابطه (۸)، توابع چگالی احتمال پسین γ_1، γ_2، α و θ بعد از ساده کردن، می‌توانند به‌صورت زیر به دست آورده شوند:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1|\alpha,\theta \sim \Gamma(a_1+nk, b_1+V(\alpha,\theta)),\\
&\gamma_2|\alpha,\theta \sim \Gamma(a_2+n, b_2+U(\alpha,\theta)),\\
&\pi(\alpha|\theta,\gamma_1,\gamma_2) \propto \alpha^{a_3+n(k+1)-1}e^{-\gamma_1 V(\alpha,\theta)-\gamma_2 U(\alpha,\theta)-\alpha b_3}\\
&\times \prod_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha}I(\theta<y_i)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha}I(\theta<x_{ij}),\\
&\pi(\theta|\alpha,\gamma_1,\gamma_2) \propto e^{-\gamma_1 V(\alpha,\theta)-\gamma_2 U(\alpha,\theta)}\\
&\times \prod_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-1}I(\theta<y_i)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-1}I(\theta<x_{ij}),
\end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{cases} V(\alpha,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha}, \\ U(\alpha,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha}. \end{cases} \qquad (10)$$

ملاحظه می‌شود که توابع چگالی پسین θ و α یک توزیع شناخته‌شده نیست، بنابراین تولید نمونه تصادفی از آن‌ها باید به روش متروپولیس-هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال انجام شود. لذا الگوریتم گیبز پیشنهادی به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

۱- با مقادیر اولیه $(\gamma_{1(0)},\gamma_{2(0)},\alpha_{(0)},\theta_{(0)})$ شروع کنید.

۲- قرار دهید $t=1$.

۳- با استفاده از روش متروپولیس-هستینگز $\theta_{(t)}$ را از $\pi(\theta|\gamma_{1(t-1)},\gamma_{2(t-1)},\alpha_{(t-1)})$ با توزیع پیشنهادی $N(\theta_{(t-1)},1)$ تولید کنید.

۴- با استفاده از روش متروپولیس-هستینگز $\alpha_{(t)}$ را از $\pi(\alpha|\gamma_{1(t-1)},\gamma_{2(t-1)},\theta_{(t-1)})$ با توزیع پیشنهادی $N(\alpha_{(t-1)},1)$ تولید کنید.

۵- $\gamma_{1(t)}$ را از تابع چگالی گاما $\Gamma(a_1+nk,b_1+V(\alpha_{(t-1)},\theta_{(t-1)}))$ تولید کنید.

۶- $\gamma_{2(t)}$ را از تابع چگالی گاما $\Gamma(a_2+n,b_2+U(\alpha_{(t-1)},\theta_{(t-1)}))$ تولید کنید.

۷- مقدار زیر را محاسبه کنید:

$$R_{t(s,k)}=\sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}\frac{(-1)^q\gamma_{2(t)}}{\gamma_{1(t)}(p+q)+\gamma_{2(t)}}.$$

۸- قرار دهید $t=t+1$.

۹- گام‌های ۳-۸ را به تعداد T مرتبه تکرار نمایید.

بنابراین با به کار بردن این الگوریتم، برآورد بیزی پارامتر $R_{s,k}$، تحت تابع زیان مربعات خطا، برابر است با:

$$\hat{R}_{s,k}^{MC}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_{t(s,k)}. \tag{11}$$

همچنین با به کار بردن ایده چن و شائو [۴]، می‌توان یک فاصله اطمینان HPD برای پارامتر $R_{s,k}$ محاسبه کرد.

۳ برآورد پارامتر $R_{s,k}$ با θ و α مشترک و معلوم

۱.۳ برآورد MLE

در این بخش، فرض می‌کنیم $\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ یک نمونه از $TpW(\gamma_2,\alpha,\theta)$ و همچنین $\{X_{i1},\cdots,X_{ik}\}, i=1,\cdots,n$ یک نمونه از $TpW(\gamma_1,\alpha,\theta)$ است. حال با فرض معلوم بودن پارامترهای α و θ، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامتر $R_{s,k}$ محاسبه می‌شود. مطابق روند بخش ۱.۲، برآورد MLE پارامترهای γ_1 و γ_2 برابر می‌شوند با:

$$\hat{\gamma}_1=nk\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha}I(\theta<x_{ij})\Big)^{-1},$$

$$\hat{\gamma}_2=nk\Big(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha}I(\theta<y_i)\Big)^{-1},$$

و لذا طبق خاصیت پایایی برآوردگرهای MLE، برآورد درستنمایی ماکسیمم $R_{s,k}$ برابر می‌شود با:

$$\hat{R}_{s,k}^{MLE}=\sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}\frac{(-1)^q\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_1(p+q)+\hat{\gamma}_2}. \tag{12}$$

۲.۳ فاصله اطمینان مجانبی

در این بخش، فاصله اطمینان مجانبی $R_{s,k}$ را به دست می‌آوریم. مشابه بخش ۲.۲، ابتدا با استفاده از قضیه حد مرکزی چند متغیره، توزیع مجانبی پارامترهای نامعلوم، یعنی (γ_1,γ_2) را حساب می‌کنیم و سپس با استفاده از روش دلتا، توزیع مجانبی $R_{s,k}$ را ارائه می‌دهیم.

در حالت دو پارامتری ماتریس اطلاع فیشر مورد انتظار پارامتر $\eta=(\eta_1,\eta_2)=(\gamma_1,\gamma_2)$ به‌وسیله $J(\eta)=-E(I(\eta))$ حاصل می‌شود که در آن $I(\eta)=[I_{ij}]=\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\right]$ ماتریس اطلاع فیشر مشاهده‌شده و $i,j=1,2$ است. در مسئله‌ای که با آن روبه‌رو هستیم، درایه‌های ماتریس متقارن اطلاع فیشر مشاهده توسط روابط زیر به دست می‌آید:

$$I_{11}=\frac{nk}{\gamma_1},\quad I_{12}=I_{21}=0,\quad I_{22}=\frac{n}{\gamma_2^2},$$

حال با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی چند متغیره،

$$(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2)\sim N_2\big((\gamma_1,\gamma_2),I^{-1}(\gamma_1,\gamma_2)\big),$$

که $I^{-1}(\gamma_1,\gamma_2)$ وارون ماتریس $I(\gamma_1,\gamma_2)$ می‌باشد. با استفاده از روش دلتا، توزیع مجانبی $\hat{R}_{s,k}^{MLE}$ می‌تواند به‌صورت $\hat{R}_{s,k}^{MLE}\sim N(R_{s,k},B),$ نتیجه شود که

$$B=\Big(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_1}\Big)^2\frac{1}{I_{11}}+\Big(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_2}\Big)^2\frac{1}{I_{22}},$$

که در آن مقادیر $\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_1}$ و $\frac{\partial R_{s,k}}{\partial\gamma_2}$ در بخش ۲.۲ آورده شده‌اند؛ بنابراین، یک فاصله‌ی اطمینان مجانبی $100(1-\eta)\%$ برای $R_{s,k}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Big(\hat{R}_{s,k}^{MLE}-z_{1-\frac{\eta}{2}}\sqrt{\hat{B}},\hat{R}_{s,k}^{MLE}+z_{1-\frac{\eta}{2}}\sqrt{\hat{B}}\Big), \tag{13}$$

که در آن z_η، 100η-امین چندک توزیع $N(0,1)$ است.

۳.۳ برآورد UMVUE

در این بخش، UMVUE پارامتر $R_{s,k}$ محاسبه می‌شود. فرض کنیم $\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ یک نمونه از $TpW(\gamma_2,\alpha,\theta)$ و همچنین $\{X_{i1},\cdots,X_{ik}\}, i=1,\cdots,n$ یک نمونه از $TpW(\gamma_1,\alpha,\theta)$ است،

بنابراین، تابع درستنمایی γ_1 و γ_2 بر مبنای مشاهدات به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} L(\alpha,\theta|\gamma_1,\gamma_2) &\propto \alpha^{n(k+1)}\gamma_1^{nk}\gamma_2^{n} \\ &\times \prod_{i=1}^{n} e^{-\gamma_2(y_i-\theta)^\alpha} I(\theta<y_i)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} e^{-\gamma_1(x_{ij}-\theta)^\alpha} I(\theta<x_{ij}) \\ &\times \prod_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^{\alpha-1} I(\theta<y_i) \\ &\times \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(x_{ij}-\theta)^{\alpha-1} I(\theta<x_{ij}). \end{aligned} \tag{14}$$

با کمی محاسبات می‌توان نتیجه گرفت که وقتی پارامترهای α و θ معلوم هستند، آماره‌های $V(\alpha,\theta)$ و $U(\alpha,\theta)$ که در این بخش برای سادگی با V و U نشان می‌دهیم و در رابطه (۱۰) تعریف‌شده‌اند، دو آماره بسنده کامل برای پارامترهای به ترتیب γ_1 و γ_2 هستند. از طرف دیگر، به کمک روش تغییر متغیر،

$$Y_i^* = (Y_i-\theta)^\alpha, \quad i=1,...,n,$$

نمونه‌ای از توزیع نمایی با میانگین γ_2^{-1} است؛ بنابراین $U=\sum_{i=1}^{n} Y_i^*$ دارای توزیع گاما با پارامتر شکل n و پارامتر مقیاس γ_2 است (یعنی $U\sim\Gamma(n,\gamma_2)$):

$$f_U(u) = \frac{\gamma_2^n}{\Gamma(n)} u^{n-1} e^{-\gamma_2 u}, \quad u>0. \tag{15}$$

لم ۱.۳. *اگر $X_{ij}^* = (X_{ij}-\theta)^\alpha$ و $V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} X_{ij}^*$، تابع چگالی احتمال شرطی Y_1^* به‌شرط $U=u$ برابر با*

$$f_{Y_1^*|U=u} = N(n-1)\frac{(u-Ny)^{n-2}}{u^{n-1}},$$

و تابع چگالی احتمال شرطی X_{11}^* به‌شرط $V=v$ برابر با

$$f_{X_{11}^* V=v} = \frac{K(nk-1(v-Kx)^{nk-2}}{v^{nk-1}},$$

است.

اثبات. تنها قسمت اول را ثابت می‌کنیم، اثبات قسمت دوم مشابه قسمت اول است. داریم:

$$f_{Y^*|U=u}(y) = \frac{f_{Y_1^*,U}(y,u)}{f_U(u)},$$

که در آن $f_{Y_1^*,U}(y,u)$، تابع چگالی احتمال توأم Y_1^* و U و $f_U(u)$ تابع چگالی احتمال U است. حال اگر فرض کنیم $W=\sum_{i=2}^{n} Y_i^*$، آنگاه W و Y_1^* مستقل هستند؛ بنابراین، تابع چگالی احتمال Y_1^* و U را می‌توان از تابع چگالی احتمال توأم W و Y_1^* با استفاده از روش تغییر متغیر به دست آورد. حال، نتیجه با استفاده از رابطه (۱۵) حاصل می‌شود. $\square$

قضیهٔ ۲.۳. *مقدار UMVUE پارامتر $\psi(\gamma_1,\gamma_2) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1(p+q)+\gamma_2}$، یعنی $\hat\psi_U(\gamma_1,\gamma_2)$، به‌صورت*

$$\begin{cases} 1-\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^\ell\left(\frac{v}{u(p+q)}\right)^\ell \frac{\binom{n-1}{\ell}}{\binom{nk+\ell-1}{\ell}}, & v<u(p+q), \\ \sum_{\ell=0}^{nk-1}(-1)^\ell\left(\frac{u(p+q)}{v}\right)^\ell \frac{\binom{nk-1}{\ell}}{\binom{n+\ell-1}{\ell}}, & v>u(p+q), \end{cases}$$

است که در آن U و V آماره‌های بسنده کامل برای γ_2 و γ_1 هستند.

اثبات. با محاسبات ساده می‌توان دید که X_{11}^* و Y_1^* دارای توزیع نمایی با میانگین γ_1^{-1} و γ_2^{-1} هستند، بنابراین:

$$\phi(X_{11}^*,Y_1^*) = \begin{cases} 1 & X_{11}^* > (p+q)Y_1^*, \\ 0 & X_{11}^* < (p+q)Y_1^*, \end{cases}$$

برآوردگر نااریب پارامتر $\psi(\gamma_1,\gamma_2)$ است. درنتیجه،

$$\begin{aligned} \hat\psi_U(\gamma_1,\gamma_2) &= E[\phi(X_{11}^*,Y_1^*)|U=u,V=v] \\ &= \int\int_A f_{X_{11}*|V=v}(x) f_{Y_1^*|U=u}(y)dxdy, \end{aligned}$$

که در آن

$$A=\{(x,y): 0<x<v,\ 0<y<u,\ x>(p+q)y\},$$

و $f_{X_{11}^*|V=v}(x)$ و $f_{Y_1^*|U=u}(y)$ برابر با مقدار تعریف‌شده در لم ۱.۳ است. برای $v<u(p+q)$،

$$\begin{aligned} \hat\psi_U(\gamma_1,\gamma_2) &= \frac{(n-1)(nk-1)}{u^{n-1}v^{nk-1}}\int_0^v\int_0^{\frac{x}{p+q}}(u-y)^{n-2} \\ &\times (v-x)^{nk-2}dydx \\ &= 1-\frac{nk-1}{u^{n-1}v^{nk-1}}\int_0^v (v-x)^{nk-2} \\ &\times (u-\frac{x}{p+q})^{n-1}dx, \quad \{Put: \frac{x}{v}=t\} \\ &= 1-(nk-1)\int_0^1(1-t)^{nk-2}(1-\frac{vt}{u(p+q)})^{n-1}dt \\ &= 1-(nk-1)\int_0^1(1-t)^{nk-2} \\ &\times \sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^\ell\binom{n-1}{\ell}(\frac{vt}{u(p+q)})^\ell dt \\ &= 1-\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^\ell(\frac{v}{u(p+q)})^\ell\frac{\binom{n-1}{\ell}}{\binom{nk+\ell-1}{\ell}}. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه و برای $v>u(p+q)$، داریم:

$$\hat\psi_U(\gamma_1,\gamma_2) = \sum_{\ell=0}^{nk-1}(-1)^\ell(\frac{u(p+q)}{v})^\ell\frac{\binom{nk-1}{\ell}}{\binom{n+\ell-1}{\ell}}$$

$\square$

بنابراین، UMVUE پارامتر $R_{s,k}$ که آن را با $\tilde{R}_{s,k}$ نشان می‌دهیم، به‌صورت

$$\hat{R}^{U}_{s,k}=\sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}(-1)^{q}\hat{\psi}_{U}(\gamma_1,\gamma_2), \qquad (16)$$

خواهد بود.

۴.۳ برآورد بیزی

در این بخش استنباط بیزی پارامتر $R_{s,k}$ تحت تابع زیان مربعات خطا، زمانی که γ_1 و γ_2 دارای توزیع‌های پیشین گامای مستقل هستند، بررسی می‌شود. در این صورت، بر مبنای نمونه سانسور مشاهده‌شده، تابع درستنمایی در رابطه (۱۴) آمده است. حال تابع چگالی پسین توأم به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\pi(\gamma_1,\gamma_2|data)&=L(data|\gamma_1,\gamma_2)\pi_1(\gamma_1)\pi_2(\gamma_2)\\&\propto \gamma_1^{nk+a_1-1}\gamma_2^{n+a_2-1}e^{-\gamma_1(V+b_1)-\gamma_2(U+b_2)}\\&=\frac{\left(\gamma_1(V+b_1)\right)^{nk+a_1}\left(\gamma_2(U+b_2)\right)^{n+a_2}}{\gamma_1\gamma_2\Gamma(nk+a_1)\,\Gamma(n+a_2)}e^{-\gamma_1(V+b_1)-\gamma_2(U+b_2)},\end{aligned}$$

که در V و U همان مقادیر هستند $V(\alpha,\theta)$ و $U(\alpha,\theta)$ که در رابطه (۱۰) بیان‌شده‌اند. حال برآورد بیزی پارامتر $R_{s,k}$ تحت تابع زیان مربعات خطا، از حل انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\hat{R}^{B}_{s,k}&=\int_0^\infty\int_0^\infty R_{s,k}\pi(\gamma_1,\gamma_2|\alpha,\theta,data)\,d\gamma_1\,d\gamma_2\\&=\sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}(-1)^{q}\\&\times\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\gamma_2}{\gamma_1(p+q)+\gamma_2}\pi(\gamma_1,\gamma_2|\alpha,\theta,data)\,d\gamma_1\,d\gamma_2.\end{aligned}$$

حال با به کار بردن ایده کیزیلاسلان و نادار [۵]، برآورد بیز دقیق را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\hat{R}^{B}_{s,k}=\sum_{p=s}^{k}\sum_{q=0}^{k-p}\binom{k}{p}\binom{k-p}{q}(-1)^{q}$$
$$\times\begin{cases}E\times {}_2F_1(w,n+a_2+1;w+1,z), & |z|<1,\\ F\times {}_2F_1(w,nk+a_1;w+1,\frac{z}{1-z}), & z<-1,\end{cases}\qquad (17)$$

که در آن $w=nk+n+a_1+a_2$ و

$$z=1-\frac{(U+b_2)(p+q)}{V+b_1},\quad E=\frac{(1-z)^{n+a_2}(n+a_2)}{w}$$
$$F=\frac{(n+a_2)}{(1-z)^{nk+a_1}w},$$

است و نیز ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma,z)$ همان سری فوق هندسی است که توسط بسیاری از نرم‌افزارها قابل‌محاسبه می‌باشد و به‌صورت انتگرالی زیر قابل‌نمایش دادن است:

$$\begin{aligned}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma,z)&=\frac{1}{\beta(\beta,\gamma-\beta)}\\&\times\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}dt.\end{aligned}$$

۴ مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، به کمک یک مطالعه شبیه‌سازی عملکرد برآوردگرهای مختلف باهم مقایسه می‌شوند. در مورد برآوردگرهای نقطه‌ای، مقایسه‌ها به‌وسیله میزان میانگین توان دوم خطا (MSE) انجام‌شده است. همچنین، برای مقایسه فواصل اطمینان مجانبی و بیزی از میانگین طول بازه‌ها و درصد پوشش استفاده می‌کنیم. شبیه‌سازی بر مبنای مقادیر پارامترهای مختلف انجام‌شده است و تمامی نتایج بر اساس ۱۰۰۰ تکرار به‌دست‌آمده‌اند. در این بخش، برای مقایسه برآوردگرهای MLE، بیز و UMVUE سه مجموعه پارامتر $\eta_i=(\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\theta)$، به‌صورت $\eta_1=(2,2,1,3)$، $\eta_2=(2,2,2,3)$ و $\eta_3=(2,2,3,2)$ را به‌کاربرده‌ایم. در حالت اول، وقتی پارامترهای مکان و شکل مشترک و نامعلوم هستند، برآوردگرهای MLE، بیز لیندلی و بیز به روش MCMC از روابط به ترتیب (۶)، (۹) و (۱۱) استفاده‌شده است. همچنین، برای به دست آوردن برآوردگر¬های بیز، دو تابع چگالی پیشین را به‌صورت

پیشین ۱: $a_j=0,\ b_j=0,\ j=1,2,3,4$

پیشین ۲: $a_j=1,\ b_j=2,\ j=1,2,3,4$

در نظر می‌گیریم که در بین آن‌ها، پیشین ۱، نا آگاهی بخش و پیشین ۲، آگاهی‌بخش هستند. برای مقادیر پارامترهای مختلف و پیشین‌های مختلف، مقادیر اریبی و MSE مربوط به MLE و برآوردگر¬های بیز $R_{s,k}$ در ۱۰۰۰ تکرار را گزارش می‌کنیم که نتایج در جدول ۱ ارائه‌شده‌اند. همچنین، برآوردهای بیز و بازه‌های اطمینان مرتبط، مبتنی بر $T=1000$ تکرار به‌دست‌آمده‌اند.

از جدول ۱، مقایسه دو برآوردگر بیز بر اساس دو پیشین نشان می‌دهد که برآوردگر¬های بیز مبتنی بر پیشین ۲ عملکرد بهتری از برآوردگر¬های بیز مبتنی بر پیشین ۱، در مقادیر MSEها دارند. علاوه‌براین ملاحظه می‌شود که عملکرد برآوردگرهای بیز محاسبه‌شده به کمک روش MCMC به‌مراتب از تقریب لیندلی بهترند.

بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی برای $R_{s,k}$ را بر اساس توزیع مجانبی MLE از رابطه (۷) محاسبه کردیم. به‌علاوه، بازه‌های اطمینان HPD نیز محاسبه‌شده‌اند. میانگین طول بازه‌های اطمینان و درصد همگرایی مرتبط با هر بازه اطمینان، در جدول ۲ گزارش شده است.

از جدول ۲، مقایسه دو بازه اطمینان HPD نشان می‌دهد که بازه‌های اطمینان HPD مبتنی بر پیشین ۲، عملکرد بهتری از بازه‌های اطمینان HPD مبتنی بر پیشین ۱ دارند.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که پارامترهای مکان و مقیاس مشترک، معلوم هستند. در این مورد، برآوردگرهای MLE، UMVUE، بیز و نیز فاصله اطمینان مجانبی مربوط به $R_{s,k}$ را با استفاده از معادلات (۱۲)، (۱۶)، (۱۷) و (۱۳) به دست می‌آوریم. چون اطلاع قبلی درباره این پارامتر وجود ندارد، از پیشین ناآگاهی بخش به‌صورت $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ برای محاسبه برآوردهای بیز استفاده می‌کنیم. مقادیر MSE، بر اساس ۱۰۰۰ تکرار در جدول ۳ آمده است. از جدول ۳، مشاهده می‌شود که MLEها دارای مقدار MSE کمتری نسبت به UMVUEها هستند.

جدول ۱. مقادیر MSE در محاسبه MLE، بیز لیندلی و بیز MCMC پارامتر $R_{s,k}$ با تعداد تکرار ۱۰۰۰ در حالتی که پارامترهای مکان و شکل متغیرهای تنش و مقاومت مشترک و نامعلوم هستند.

η_i	(n, k, s)	MLE	پیشین ۱		پیشین ۲	
			لیندلی	MCMC	لیندلی	MCMC
	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۰۱۵۳	۰/۰۱۳۲	۰/۰۰۹۲	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۷۱
η_1	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۹۵	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۵۱
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۴۰
	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۰۱۴۷	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۹۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۰۷۰
η_2	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۵۲
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۴۹
	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۰۱۶۸	۰/۰۱۳۰	۰/۰۰۹۶	۰/۰۱۱۸	۰/۰۰۷۶
η_3	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۵۰
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۴۰
	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۰۱۲۶	۰/۰۱۱۲	۰/۰۰۷۸	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۵۸
η_1	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۴۲
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۳۰
	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۱۰	۰/۰۰۷۹	۰/۰۱۰۵	۰/۰۰۵۱
η_2	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۴۲
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۳۸
	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۰۱۳۵	۰/۰۱۲۰	۰/۰۰۷۰	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۵۹
η_3	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۴۹
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۳۲

جدول ۲. مقادیر درصد همگرایی و متوسط طول فاصله در محاسبه فواصل اطمینان مجانبی و HPD پارامتر $R_{s,k}$ با تعداد تکرار ۱۰۰۰ در حالتی که پارامترهای مکان و شکل متغیرهای تنش و مقاومت مشترک و نامعلوم هستند.

η_i	(n, k, s)	فاصله اطمینان مجانبی		فاصله HPD: پیشین ۱		فاصله HPD: پیشین ۲	
		درصد همگرایی	طول فاصله	درصد همگرایی	طول فاصله	درصد همگرایی	طول فاصله
	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۹۱۵	۰/۴۵۵۳	۰/۹۲۱	۰/۴۰۲۵	۰/۹۲۶	۰/۳۸۷۹
η_1	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۹۲۰	۰/۴۳۳۶	۰/۹۲۵	۰/۳۶۶۵	۰/۹۳۱	۰/۳۲۱۵
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۹۲۵	۰/۴۰۹۸	۰/۹۳۰	۰/۳۳۵۱	۰/۹۳۶	۰/۲۹۴۵
	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۹۱۷	۰/۴۵۵۰	۰/۹۲۰	۰/۴۰۱۲	۰/۹۲۶	۰/۳۸۲۶
η_2	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۹۲۳	۰/۴۳۱۵	۰/۹۲۶	۰/۳۶۱۹	۰/۹۳۰	۰/۳۲۹۸
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۹۲۶	۰/۴۱۰۲	۰/۹۳۱	۰/۳۳۲۹	۰/۹۳۶	۰/۲۹۸۵
	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۹۱۵	۰/۴۴۲۳	۰/۹۲۲	۰/۴۰۶۸	۰/۹۲۷	۰/۳۷۷۵
η_3	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۹۲۱	۰/۴۳۵۲	۰/۹۲۵	۰/۳۶۹۵	۰/۹۳۱	۰/۳۲۸۵
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۹۲۶	۰/۴۰۵۷	۰/۹۳۱	۰/۳۳۱۲	۰/۹۳۷	۰/۲۹۹۰
	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۹۲۳	۰/۴۲۱۲	۰/۹۲۶	۰/۳۷۷۴	۰/۹۳۵	۰/۳۴۵۴
η_1	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۹۲۹	۰/۴۰۲۵	۰/۹۳۱	۰/۳۳۵۲	۰/۹۴۲	۰/۲۸۵۷
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۹۳۳	۰/۳۸۵۳	۰/۹۳۵	۰/۳۰۲۳	۰/۹۵۳	۰/۲۳۴۵
	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۹۲۲	۰/۴۲۲۲	۰/۹۲۷	۰/۳۷۹۸	۰/۹۳۶	۰/۳۴۹۶
η_2	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۹۲۷	۰/۴۰۱۲	۰/۹۳۰	۰/۳۳۴۷	۰/۹۴۰	۰/۲۷۹۵
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۹۳۴	۰/۳۷۷۵	۰/۹۳۶	۰/۳۰۵۴	۰/۹۵۲	۰/۲۳۳۲
	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۹۲۴	۰/۴۳۵۷	۰/۹۲۶	۰/۳۷۱۵	۰/۹۳۵	۰/۳۴۸۷
η_3	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۹۲۸	۰/۴۱۵۳	۰/۹۳۱	۰/۳۴۸۹	۰/۹۴۲	۰/۲۷۷۸
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۹۳۳	۰/۳۸۹۵	۰/۹۳۵	۰/۲۹۸۵	۰/۹۵۰	۰/۲۲۹۵

جدول ۳. مقادیر MSE در محاسبه MLE، بیز دقیق و UMVUE و مقادیر درصد همگرایی و متوسط طول فاصله در محاسبه فواصل اطمینان مجانبی و HPD پارامتر $R_{s,k}$ با تعداد تکرار ۱۰۰۰ در حالتی که پارامترهای مکان و شکل متغیرهای تنش و مقاومت مشترک و معلوم هستند.

η_i	(n,k,s)	MLE	UMVUE	بیز	فاصله اطمینان مجانبی: درصد همگرایی	فاصله اطمینان مجانبی: طول فاصله
$\eta_۱$	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۹۵	۰/۰۱۱۰	۰/۰۰۷۸	۰/۹۲۵	۰/۴۰۲۳
	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۵۳	۰/۹۳۶	۰/۳۷۷۷
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۴۹	۰/۹۴۰	۰/۳۱۴۴
$\eta_۲$	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۰۱۰۰	۰/۰۱۱۵	۰/۰۰۸۵	۰/۹۲۴	۰/۴۱۵۲
	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۵۰	۰/۹۳۴	۰/۳۸۵۴
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۴۵	۰/۹۴۲	۰/۳۲۰۰
$\eta_۳$	(۱۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۹۰	۰/۰۱۱۶	۰/۰۰۸۰	۰/۹۲۴	۰/۴۰۹۸
	(۲۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۵۹	۰/۹۳۶	۰/۳۷۴۴
	(۳۰, ۳, ۱)	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۴۰	۰/۹۴۴	۰/۳۱۹۸
$\eta_۱$	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۹۵	۰/۰۰۶۷	۰/۹۴۸	۰/۳۴۲۵
	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۴۶	۰/۹۵۲	۰/۳۰۲۳
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۳۳	۰/۹۵۵	۰/۲۵۴۷
$\eta_۲$	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۶۹	۰/۹۴۰	۰/۳۴۰۰
	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۴۰	۰/۹۵۰	۰/۳۰۵۴
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۳۵	۰/۹۵۶	۰/۲۵۹۵
$\eta_۳$	(۱۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۷۰	۰/۹۴۹	۰/۳۵۶۷
	(۲۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۴۳	۰/۹۵۶	۰/۳۱۴۲
	(۳۰, ۴, ۲)	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۷۰	۰۰۰۳۰	۰/۹۵۵	۰/۲۶۵۵

به‌عنوان یک نتیجه کلی، از جداول ۱ تا ۳، مشاهده می‌شود که برای n و s ثابت وقتی k افزایش یابد، یا برای k و s ثابت، وقتی n افزایش یابد، عملکرد برآوردگرهای مختلف بهبود می‌یابد. در مورد برآوردگرهای نقطه‌ای این بهبود با کاهش مقدار MSE و در مورد برآوردگرهای فاصله‌ای، این بهبود با کاهش طول فاصله و افزایش درصد همگرایی همراه است.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، برآورد پارامتر تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای توزیع وایبول سه پارامتری بررسی شد. مسئله در دو حالت مختلف مطالعه شده است. در حالت اول وقتی متغیرهای تنش و مقاومت دارای دو پارامتر مکان و شکل مشترک و یک پارامتر مقیاس غیرمشترک هستند و همه این پارامترهای نامعلوم‌اند، روش‌های مختلفی برای برآورد $R_{s,k}$ استفاده شد. چون MLE مربوط به پارامتر $R_{s,k}$ را نمی‌توان به فرم بسته به دست آورد، روش عددی نیوتن رافسون برای محاسبه آن به کار گرفته شد. همچنین در مورد برآورد بیزی پارامتر $R_{s,k}$، نیز به دلیل عدم وجود فرم بسته از دو روش تقریبی لیندلی و MCMC استفاده شد. همچنین در این قسمت فاصله اطمینان مجانبی به‌دست‌آمده است.

در حالت دوم، وقتی پارامترهای مکان و شکل مشترک معلوم و پارامتر مقیاس غیرمشترک، نامعلوم است، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم، برآورد UMVUE و بیز دقیق پارامتر $R_{s,k}$ محاسبه شد و یک فاصله اطمینان مجانبی برای آن به دست آمد. درنهایت، شبیه‌سازی‌های مونت‌کارلو برای بررسی عملکرد برآوردگر¬های مختلف به کار گرفته شدند. نتایج شبیه‌سازی در هر دو حالت به دست آمد. این نتایج نشان می‌دهد که برآوردگرهای بیز دارای بهترین عملکرد برحسب MSE هستند و برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی در جایگاه دوم قرار دارند. همچنین در بین برآوردگرهای بیزی، عملکرد بهتر متعلق به توابع چگالی پیشین آگاهی‌بخش است. لذا در صورت وجود اطلاعات قبلی از پارامترها، بهتر است که به بهترین نحو از آن‌ها استفاده شود.

مراجع

[۱] کهن‌سال، ا؛ و شعاعی، ش. (۱۳۹۸). استنباط بیزی پارامتر قابلیت اطمینان در توزیع رایلی دو پارامتری تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی. *مجله مهندسی و مدیریت کیفیت*، ۹(۴)، ۲۸۴-۲۹۴.

[2] Ahmadi, K., Ghafouri, S. (2019). Reliability estimation in a multicomponent stress–strengthmodel under generalized half-normal distribution based onprogressive type-II censoring. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **89**, 2505-2548.

[3] Bhattacharyya G. K., Johnson R. A. (1974). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model. *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 966-970.

[4] Chen, M. H., Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian Credible and HPD intervals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8(1)**, 69-92.

[5] Kizilaslan, F., Nadar, M. (2018). Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a bivariate Kumaraswamy distribution. *Statistical Papers*, **59(1)**, 307-340.

[6] Kohansal, A. (2019). On estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model for a Kumaraswamy distribution based on progressively censored sample. *Statistical Papers*, **60(6)**, 2185-2224.

[7] Kohansal, A., Shoaee, S. (2021). Bayesian and classical estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model under adaptive hybrid progressive censored data. *Statistical Papers*, **62**, 309-359.

[8] Lindley, D. V. (1980). Approximate Bayesian methods. *Trabajos de Estadistica*, **31(1)**, 281-288.

Statistical Inference on Multi-Component Stress-Strength Parameter in Three Parameter Weibull Distribution

Atefeh Karami[1] and Akram Kohansal[2]

Abstract:

The statistical inference of the multi-component stress-strength parameter, $R_{s,k}$, is considered in the three-parameter Weibull distribution. The problem is studied in two cases. In the first case, assuming that the stress and strength variables have common shape and location parameters but non-common scale parameters, and all these parameters are unknown, the maximum likelihood estimation and the Bayesian estimation of the parameter $R_{s,k}$ are investigated. In this case, as the Bayesian estimation does not have a closed form, it is approximated by two methods: Lindley and MCMC. Also, asymptotic confidence intervals have been obtained. In the second case, assuming that the stress and strength variables have known common shape and location parameters but non-common and unknown scale parameters, the maximum likelihood estimation, the uniformly minimum variance unbiased estimators, the exact Bayesian estimation of the parameter $R_{s,k}$, and the asymptotic confidence interval are calculated. Finally, using Monte Carlo simulation, the performance of different estimators has been compared.

Keywords: Multi-component stress-strength parameter, Bayesian estimation, Lindley's approximation, Three parameter Weibull distribution.

[1] **Master Graduate, Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran**

[2] **Associate Professor, Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.**